Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

Der Energiesatz für eine Punktmasse m im Zentralpotential $V(r)$ mit Gesamtenergie E und Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = L\vec{e}_z$ kann unter Ausnutzung von $mr^2\dot{\varphi} = L$ auf folgende Form gebracht werden:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{L^2}{r^4} = 2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2} \tag{1}$$

Für das Newtonsche Potential $V(r) = -\alpha/r$ lässt sich dies nach vorübergehender Einführung von $u = 1/r$ leicht integrieren und man erhält

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\varphi} \tag{2a}$$

mit

$$p := \frac{L^2}{m\alpha} \quad \text{und} \quad \epsilon := \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\,, \tag{2b}$$

was bekanntlich eine Ellipse mit großer Halbachse $a = p/(1-\epsilon^2) = -\alpha/2E$ und Exzentrität ϵ beschreibt. $\varphi = 0$ entspricht dem Punkt größter Annäherung, dem *Periastron*. Dieser kehrt mit der Periodizität 2π wieder und ist daher ein fester Punkt im Raum; die Bahn ist also geschlossen.

Für allgemeines $V(r)$ wird die Bahn im Allgemeinen nicht geschlossen sein. Vielmehr gilt nach (1) für den Exzess $\Delta\varphi$ der Periastronwiederkehr

$$\begin{aligned} 2\pi + \Delta\varphi &= 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr\, L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} \\ &= -2\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr\,\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Betrachten Sie nun das Potential $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \Delta V(r)$ mit ΔV als „kleiner Störung“. Leiten Sie in linearer Näherung aus (3) folgenden Ausdruck für $\Delta\varphi$ ab:

$$\Delta\varphi = m\frac{\partial}{\partial L}\left\{\frac{1}{L}\int_0^{2\pi} d\varphi\; r_*^2(\varphi; L, E)\,\Delta V(r_*(\varphi; L, E))\right\}\,, \tag{4}$$

wobei $r_*(\varphi; L, E)$ die Lösung (2a) zum ungestörten Potential $-\alpha/r$ zu den Werten L und E von Drehimpuls und Energie ist. Beachten Sie, dass der Term in den geschweiften Klammern als Funktion von L und E aufgefasst wird, so dass die partielle Ableitung nach L bei konstantem E auszuführen ist. Berechnen Sie nun $\Delta\varphi$ für die Störungen der Form $\Delta V_2(r) = \delta_2/r^2$ und $\Delta V_3(r) = \delta_3/r^3$ und zeigen Sie, dass sich ausgedrückt durch die große Halbachse a und die Exzentrität ϵ der ungestörten Ellipse folgende Werte ergeben:

$$\Delta_2\varphi \; = \; -2\pi\delta_2 m L^{-2} \quad = \; -2\pi \, \frac{\delta_2/\alpha}{a(1-\epsilon^2)} \, , \tag{5a}$$

$$\Delta_3\varphi \; = \; -6\pi\alpha\delta_3 m^2 L^{-4} \; = \; -6\pi \, \frac{\delta_3/\alpha}{a^2(1-\epsilon^2)^2} \, . \tag{5b}$$

(Achtung: Prinzipiell sind vor der partiellen Differentiation nach L die Parameter p und ϵ durch (2b) als Funktionen von L und E auszudrücken.)

Aufgabe 2

Wir wollen nun (5) auf zwei Fälle anwenden. Im ersten Fall betrachten wir die speziell relativistische skalare Gravitationstheorie, für die wir die Bewegungsgleichung einer Testmasse schon in Aufgabe 2 von Blatt 2 betrachtet haben. Setzt man in der dortigen Formel (9) $\Phi = -GM/r$ und entwickelt die rechte Seite nach Potenzen von GM/rc^2, so kann man die Parameter α und δ_2 sofort ablesen. Beweisen Sie damit, dass die Skalare Theorie in führender Ordnung eine Periastronprezession von

$$\Delta\varphi = -\pi \left[\frac{GM/c^2}{a(1-\varepsilon^2)} \right] \, . \tag{6}$$

Das ist $-1/6$ des Wertes, der sich aus der Allgemeinen Relativitätstheorie ergibt.

Als zweiten und physikalisch relevanteren Fall betrachten wir den Beitrag durch ein Quadrupolmoment innerhalb der Newtonschen Theorie. So ist die Sonne als Folge Ihrer Eigenrotation entlang ihrer Rotationsachse abgeplattet und besitzt dadurch ein Quadrupolmoment, das durch den dimensionslosen Parameter $J_2 \approx 2 \cdot 10^{-7}$ charakterisiert wird. Das Potential $V(r)$ wird dadurch modifiziert zu

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \, \left(1 + J_2 \, \frac{R^2}{2r^2} \, (1 - 3\cos^2\theta) \right) \, , \tag{7}$$

wobei R der Radius der Sonne und θ der Winkel zwischen Bahnebene und Äquatorialebene der Sonne ist. Lesen Sie daraus wieder die relevanten Parameter ab und bestimmen Sie daraus $\Delta\varphi$. Werten Sie dies für den Planeten Merkur numerisch in Einheiten [Bogensekunden/100 Jahre] aus.