Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1

Die Viererstromdichte einer Punktladung e, die sich auf einer Weltlinie $z^\mu(\tau)$ im Minkowskiraum bewegt (τ ist die Eigenzeit), ist gegeben durch

$$j^\mu(x) = e \int d\tau\, \delta^{(4)}\big(x - z(\tau)\big) \dot{z}^\mu(\tau)\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Der Energie-Impuls-Tensor einer Punktmasse m, die sich entlang $z(\tau)$ bewegt, ist

$$T^{\mu\nu}(x) = m \int d\tau\, \delta^{(4)}\big(x - z(\tau)\big)\, \dot{z}^\mu(\tau) \dot{z}^\nu(\tau)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ genau dann gilt, wenn die Weltline eine Gerade ist. (Achtung: Sie haben es hier mit Distributionen zu tun.)

Aufgabe 2

Sei $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ein C^2-Diffeomorphismus des Minkowskiraums, also eine Bijektion, die zusammen mit ihrer Umkehrung zweimal stetig differenzierbar ist. Wir fordern, dass ϕ eine Isometrie der Minkowski Metrik sei. Für die Komponenten $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ gilt dann (Matrixnotation):

$$\phi_*^\top \cdot \eta \cdot \phi_* = \eta\,. \tag{3}$$

Dabei ist ϕ_* die Jacobi Matrix mit Komponenten $\frac{\partial \phi^m}{\partial x^a}$. Zeigen Sie, dass ϕ eine affine Abbildung sein muss und demnach eine inhomogene Lorentztransformation. (Tipp: Differenzieren Sie die ab-Komponente der Gleichung (3) nach x^c. Schreiben Sie die so erhaltene Gleichung noch zweimal auf, wobei Sie die Indizes a, b, c ein- bzw. zweimal zyklisch permutieren. Subtrahieren Sie die letzte Gleichung von der Summe der ersten beiden und deduzieren Sie das Behauptete.)

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{F}$ der Vektorraum aller Abbildungen $F : \mathbb{R}^4 \to V$, wobei V ein endlichdimensionaler reellen Vektorraum ist. Dieser trage eine Darstellung D der Gruppe $GL(4, \mathbb{R})$ aller reellen invertierbaren 4×4 Matrizen. Sei ferner ***Diff*** die Gruppe aller C^1-Diffeomorphismen (Bijektionen, die zusammen mit ihrer Umkehrung einmal stetig differenzierbar sind) des $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta : \textbf{\textit{Diff}} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}, \quad (\phi, F) \mapsto \Delta(\phi)\, F := (D(\phi_*) \cdot F) \circ \phi^{-1} \tag{4}$$

eine Darstellung von ***Diff*** auf $\mathcal{F}$ definiert. (Achtung: $D(\phi_*)$ ist eine matrixwertige Funktion auf $\mathbb{R}^4$. Für Summen und Produkte von Funktionen gilt $(f + g) \circ \phi = (f \circ \phi) + (g \circ \phi)$ und $(f \cdot g) \circ \phi = (f \circ \phi) \cdot (g \circ \phi)$.)