Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Aufgabe 1

Für $N \geq n$ sei $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^N$ eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Abbildung, deren Jacobi Matrix $\{\partial_i f^\mu\}$ $(i = 1 \cdots n,\ \mu = 1 \cdots N)$ überall ihren Höchstrang n annimmt. Dann ist jedem Punkt $x \in U$ ein n-Tupel linear unabhängiger Vektoren $e_i(x) := \partial_i f(x) \in \mathbb{R}^N$ zugeordnet, das stetig differenzierbar von x abhängt. Man nennt $T_x(U) := \mathrm{Span}\{e_1(x), \cdots, e_n(x)\} \subset \mathbb{R}^N$ den *Tangentialraum an* x und Funktionen $V : U \ni x \mapsto V(x) \in T_x(U)$ *Tangentialvektorfelder*. Letztere heißen stetig differenzierbar, wenn in der Entwicklung $V(x) = V^i(x)e_i(x)$die reellwertigen Funktionen V^i stetig differenzierbar sind. Durch das natürliche Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ des $\mathbb{R}^N$ wird in jedem $T_x(U)$ ein Skalarprodukt $g(\cdot,\cdot)(x)$ induziert, das durch seine Werte auf der Basis $\{e_i(x)\}$ (die sogenannten metrische Koeffizienten) $g_{ij}(x) := g(e_i, e_j)(x) := \langle e_i(x) \mid e_j(x) \rangle$ eindeutig charakterisiert wird.

Wir definieren nun eine *kovariante Ableitung* auf Tangentialvektorfeldern: Sei χ der Vektorraum aller Tangentialvektorfelder über U, dann ist eine kovariante Ableitung eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung $\nabla : \chi \times \chi \to \chi$, die zusätzlich folgende Eigenschaften besitzt, die für alle differenzierbaren Tangentialvektorfelder V, W und alle differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ gelten sollen:

$$\nabla_{fV} W = f \nabla_V W \qquad \text{„f-linear" im 1. Argument}\,, \tag{1}$$

$$\nabla_V fW = f \nabla_V W + V(f) W \qquad \text{„f-derivativ" im 2. Argument}\,, \tag{2}$$

wobei $V(f) := V^i \partial_i f$ die Ableitung von f entlang V ist. Zeigen Sie, dass durch diese Eigenschaften die kovariante Ableitung eindeutig bestimmt ist, wenn sie für die Basisfelder $e_i(x)$ gegeben ist. Letzteres ist natürlich genau dann der Fall, wenn die Γ-Koeffizienten der Entwicklung

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k \tag{3}$$

in Abhängigkeit von x gegeben sind. Man definiert nun

$$g(e_k, \nabla_{e_i} e_j) := \langle e_k \mid \partial_i e_j \rangle\,. \tag{4}$$

Interpretieren Sie dies geometrisch und leiten Sie folgende Formel für die Γ-Koeffizienten ab:

$$\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2} g^{kn}(-g_{ij,n} + g_{ni,j} + g_{jn,i}) \,, \tag{5}$$

wobei $g_{ij,k} := \partial_k g_{ij}$.

Aufgabe 2

Die Kovariante Ableitung kann auf andere Objekte fortgesetzt werden: Zunächst setzt man für Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ einfach $\nabla_V f := V(f)$. Weiter kann man jedem Tangentialvektoraum $T_x(U)$ seinen Dualraum $T^*_x(U)$ aller linearen Abbildungen $T_x(U) \to \mathbb{R}$ zuordnen. Abbildungen $U \ni x \mapsto T^*_x(U)$ nennt man Kovektorfelder und bezeichnet ihren Vektorraum mit χ^*. $K \in \chi^*$ heisst differenzierbar, falls für alle differenzierbaren $V \in \chi$ die $K(V)$ differenzierbare $\mathbb{R}$-wertige Funktionen sind. Die kovariante Ableitung auf Kovektorfeldern ist eine Abbildung $\nabla : \chi \times \chi^* \to \chi^*$ die durch folgende Forderung einer 'Produktregel' eindeutig festgelegt ist:

$$[\nabla_V K](W) := \nabla_V[K(W)] - K(\nabla_V W) \,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass sie f-linear im 1. und f-derivativ im 2. Argument ist.

Sei nun $\{\theta^i(x)\} \subset T^*_x(U)$, $i = 1 \cdots n$, Dualbasis zu $\{e_i(x)\} \subset T_x(U)$, d.h. es gilt $\theta^i(e_j) = \delta^i_j$ an jedem Punkt $x \in U$. Zeigen Sie mit (6), dass (vgl. (3))

$$\nabla_{e_i} \theta^j = -\Gamma^j_{ik} \theta^k \,. \tag{7}$$

Man definiert weiter

$$T_x{}^{\ell}{}_m(U) := \underbrace{T_x(U) \otimes \cdots \otimes T_x(U)}_{\ell \text{ Stück}} \otimes \underbrace{T^*_x(U) \otimes \cdots \otimes T^*_x(U)}_{m \text{ Stück}} \tag{8}$$

und bezeichnet den Vektorraum aller Abbildungen $U \ni x \to T_x{}^p{}_q(U)$ mit χ^ℓ_m. Eine kovariante Ableitung (f-linear bzw. derivativ) $\nabla : \chi \times \chi^\ell_m \to \chi^\ell_m$ ist wiederum eindeutig durch die Forderung der Produktregel zwischen den einzelnen Tensorfaktoren definiert; man verabredet die Schreibweise

$$\nabla_{e_i}(\Lambda^{j\cdots k}_{l\cdots m}\, e_j \otimes \cdots \otimes e_k \otimes \theta^l \otimes \cdots \otimes \theta^m) =: (\nabla_i \Lambda^{j\cdots k}_{l\cdots m})\, e_j \otimes \cdots \otimes e_k \otimes \theta^l \otimes \cdots \otimes \theta^m \,. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \nabla_i \Lambda^{j\cdots k}_{l\cdots m} = \partial_i \Lambda^{j\cdots k}_{l\cdots m} &+ \Lambda^{j'\cdots k}_{l\cdots m} \Gamma^j_{ij'} + \cdots + \Lambda^{j\cdots k'}_{l\cdots m} \Gamma^k_{ik'} \\ &- \Lambda^{j\cdots k}_{l'\cdots m} \Gamma^{l'}_{il} - \cdots - \Lambda^{j\cdots k}_{l\cdots m'} \Gamma^{m'}_{im} \,. \end{aligned} \tag{10}$$

Zeigen Sie damit und mit (5), dass die Metrik $g = g_{jk}\theta^j \otimes \theta^k \in \chi^0_2$ kovariant konstant ist, d.h. dass

$$\nabla_i g_{jk} = 0. \tag{11}$$

Aufgabe 3

Sei D die definierende Darstellung der Gruppe $GL(4,\mathbb{R})$ und D^ℓ_m die $\ell + m$-fache Tensorproduktdarstellung mit ℓ Faktoren aus der definierenden und m Faktoren aus deren invers-transponierter Darstellung. Sei $\dot{D}^\ell_m$ die zu D^ℓ_m gehörige Darstellung der Lie algebra $\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$ von $GL(4,\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die kovariante Ableitung (10) dann in folgender kompakter Form geschrieben werden kann:

$$\nabla_i \Lambda = \partial_i \Lambda + \dot{D}^\ell_m(\Gamma_i) \cdot \Lambda\,, \tag{12}$$

wobei mit Γ_i die Matrix mit den Komponenten Γ^k_{ij} gemeint ist.