

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie
von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Aufgabe 1

Für eine fest vorgegebene Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genüge die Kurve $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto x(\lambda)$ in der Raumzeit folgender Gleichung (sie unterscheidet sich von der Geodätengleichung durch die i.A. nicht verschwindende rechte Seite):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (1)$$

Zeigen Sie

$$\frac{dG}{d\lambda} = 2fG, \quad \text{für } G(\lambda) := g_{\mu\nu}(x(\lambda)) \frac{dx^\alpha(\lambda)}{d\lambda} \frac{dx^\beta(\lambda)}{d\lambda}. \quad (2)$$

Beweisen Sie damit, dass Lösungen von (1) entweder stets zeitartig, raumartig oder lichtartig sind. (Zur Erinnerung: Eine Kurve heißt zeit-, licht- oder raumartig, wenn ihre Tangentialvektoren überall entlang der Kurve zeit-, licht- oder raumartig sind, d.h. $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ größer, gleich oder kleiner Null ist.)

Nehmen Sie nun eine Umparametrisierung $\lambda \mapsto \lambda' := h(\lambda)$ vor und zeigen Sie, dass die Kurve $y := x \circ h^{-1}$ genau dann die Geodätengleichung erfüllt, falls $h'' = h'f$ (Strich bedeutet Ableitung). Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung mit $h' \neq 0$ (warum?) an und zeigen Sie so, dass (1) durch Umparametrisierung stets auf die Geodätengleichung transformierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass alle mit der Geodätengleichung verträglichen Umparametrisierungen durch die affinen Abbildungen von \mathbb{R} gegeben sind, d.h. $\lambda \mapsto a\lambda + b$ mit $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$. Kurven die der Gleichung (1) genügen heißen *Autoparallele* (warum?) und die Parametrisierungen, die Autoparallele zu Geodätischen machen, *affin*.

Seien p_1 und p_2 zwei zeitartig zueinander liegende Punkte der Raum-Zeit und $C^2(p_1, p_2)$ die Menge der zweimal stetig differenzierbaren zeitartigen Kurven mit den Endpunkten p_1 und p_2 . Auf $C^2(p_1, p_2)$ ist das *Längenfunktional* definiert durch

$$\mathcal{L}[x(\lambda); \lambda_1, \lambda_2] := \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu}(x(\lambda)) \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{dx^\nu(\lambda)}{d\lambda}}, \quad (3)$$

wobei $\lambda_{1,2}$ definiert sind durch $x(\lambda_{1,2}) = p_{1,2}$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$. Sei $h : [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow [\lambda'_1, \lambda'_2]$ ein mindestens einmal stetig differenzierbarer Diffeomorphismus (Bijektion die in beiden Richtungen stetig differenzierbar ist) und $y := x \circ h^{-1}$ die durch h reparametrisierte Kurve. Zeigen Sie, dass das Längenfunktional im folgenden Sinne reparametrisierungsinvariant ist:

$$\mathcal{L}[x'(\lambda'); \lambda'_1, \lambda'_2] = \mathcal{L}[x(\lambda); \lambda_1, \lambda_2] \quad (4)$$

Zeigen Sie weiter, dass die Euler-Lagrange Gleichung des Längenfunctionals (3) äquivalent ist der Differentialgleichung (1) mit $f(\lambda) := \frac{dG(\lambda)}{d\lambda}/2G$ und $G(\lambda)$ wie in (2). Ziehen Sie Konsequenzen aus den Ergebnissen von Aufgabe 1.

Aufgabe 2

Mit Hilfe der *kovarianten Ableitung* definiert man den Begriff der *Parallelverschiebung* wie folgt: Sei $x(\lambda)$ eine (zumindest stückweise stetig differenzierbare) Kurve und V ein Vektorfeld über der Kurve (d.h auf dem Bild der Kurve definiert). Dann heißt V entlang $x(\lambda)$ parallel verschoben, wenn

$$\frac{dV^\lambda}{d\lambda} + \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\nu = 0. \quad (5)$$

Zeigen Sie: Sind zwei Vektorfelder V_1 und V_2 entlang der Kurve parallel verschoben, so ist ihr Skalarprodukt $g(V_1, V_2)$ entlang der Kurve konstant. Zeigen Sie weiter: Ist die Kurve eine Geodätische und V entlang der Kurve parallel verschoben, so ist auch $g(V, \dot{x})$ entlang der Kurve konstant. (Tipp: Beim genauen Hinsehen brauchen Sie nichts zu rechnen.)

Aufgabe 3

Man betrachte die 2-Sphäre $S^2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ mit der gewöhnlichen Metrik (in sphärischen Polarkoordinaten):

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2. \quad (6)$$

Auf S^2 sei γ der Breitenkreis $\theta = \theta_0$. Berechnen Sie als Funktion von θ_0 den Winkel, um den ein entlang γ parallel verschobener Tangentialvektor nach einem vollen Umlauf an seinen Ausgangspunkt verdreht zurückkehrt. Berechnen Sie auch den Drehwinkel, den ein parallel verschobener Vektor nach einem Umlauf um ein geodätisches Dreieck erfährt. (Tipp: Wenn Sie hier das Ergebnis von Aufgabe 2 benutzen, brauchen Sie für die letzte Aufgabe fast nichts zu rechnen.)