Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 7

Aufgabe 1

Sei $\{x^\mu\}$ ein Normalkoordinatensystem um den Punkt p der Raumzeit; d.h. es gilt $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(p) = 0$ und $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(p) = 0$. Zeigen Sie, dass bezüglich diesem Koordinatensystem die Komponenten des kovarianten (d.h. alle Indizes unten) Krümmungstensors $R_{\alpha\beta\mu\nu} := g_{\alpha\lambda} R^\lambda{}_{\beta\mu\nu}$ durch folgende Formel gegeben sind (wir schreiben $\partial^2_{\alpha\beta} := \partial_\alpha \partial_\beta$ etc.):

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(-\partial^2_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \partial^2_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} + \partial^2_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} + \partial^2_{\beta\mu} g_{\alpha\nu})\,. \tag{1}$$

Leiten Sie daraus die in jedem Koordinatensystem gültigen Symmetrierelationen ab

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}\,, \tag{2}$$

$$3\,R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0\,. \tag{3}$$

Gleichung (3) nennt man auch die *erste Bianchi-Identität*. Zeigen Sie mit (2) und (3), dass der Krümmungstensor in n Dimensionen $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ unabhängige Komponenten hat. Zeigen sie weiter mit (1) die Relation

$$\partial_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu}(p) + \partial_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda}(p) + \partial_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu}(p) = 0\,. \tag{4}$$

Diese Relation gilt nur am Punkt p und auch dort nur im Normalkoordinatensystem. Begründen Sie, warum trotzdem damit bereits folgende, in jedem Koordinatensystem (und an jedem Punkt) gültige Relation bewiesen ist (sog. *zweite Bianchi-Identität*):

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0\,. \tag{5}$$

Man definiert

$$R_{\mu\nu} := g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} \qquad \text{Ricci-Tensor}\,, \tag{6}$$

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad \text{Ricci-Skalar}\,, \tag{7}$$

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \qquad \text{Einstein-Tensor}\,. \tag{8}$$

Zeigen Sie die Symmetrie von $R_{\mu\nu}$ und $G_{\mu\nu}$. Leiten Sie durch Kontraktion der Bianchi-Identität (5) über (α, μ) und (β, ν) die kovariante Divergenzfreiheit des Einstein-Tensors ab:

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0\,. \tag{9}$$

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Lie Ableitung der Metrik nach dem Vektorfeld X mit Hilfe der kovarianten Ableitung wie folgt geschrieben werden kann:

$$L_X g_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} X_{\nu} + \nabla_{\nu} X_{\mu}\,. \tag{10}$$

Das Vektorfeld X heißt *Killingfeld* der falls $L_X g = 0$. Zeigen Sie, dass die Killingfelder zu einer festen Metrik g eine reelle Lie Algebra bilden und dass jedes Killingfeld X die folgende Identität erfüllt:

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} X_{\lambda} = R^{\sigma}{}_{\mu\nu\lambda} X_{\sigma}\,. \tag{11}$$

(Tipp: Schreiben Sie die linke Seite von (11) hin und wiederholen Sie die Hintereinanderausführung folgender zwei Operationen drei Mal: Vertauschen der kovarianten Ableitungen, gefolgt von Ersetzen von $\nabla_{\mu} X_{\lambda}$ durch $-\nabla_{\lambda} X_{\mu}$. Von den ersten Operationen handeln Sie Sich drei Krümmungsterme ein, die Sie wegen der 1. Bianchi-Identität (Aufgabe 1, Formel (3)) zu einem zusammenfassen können.)

Bestimmen sie alle Killingfelder des Minkowskiraumes. Was haben diese mit Poincaré-Transformationen zu tun?