Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 8

Aufgabe 1

Rechnen Sie explizit mit Hilfe der Christoffel-Symbole nach, dass die kovariante Divergenz $\nabla_\mu V^\mu$ eines Vektorfeldes gegeben ist durch

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left(\sqrt{g} V^\mu \right) \, , \tag{1}$$

wobei hier $g := |\det\{g_{\alpha\beta}\}|$.

Aufgabe 2

Seien $g_{\mu\nu}$ und $\bar{g}_{\mu\nu}$ zwei Lorentzmetriken und $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ bzw $\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ die zugehörigen Christoffel-Symbole. Zeigen Sie, dass deren Differenz die Komponenten eines Tensors sind. (Tipp: Ein einfaches Argument reicht; Sie brauchen nichts zu rechnen.)

Aufgabe 3

Sei T ein Tensor des Typs $\binom{\ell}{m}$. Wie in der Vorlesung bezeichnen $D^{(\ell,m)}$ und $D_*^{(\ell,m)}$ die entsprechenden Tensorproduktdarstellungen der Gruppe $GL(4,\mathbb{R})$ beziehungsweise ihrer Lie Algebra $gl(4,\mathbb{R})$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Lie-Ableitung von T nach einem Vektorfeld V durch die partiellen (∂, in Koordinaten definiert) oder kovarianten Ableitungen (∇) wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} L_V T &= \partial_V T - D_*^{(\ell,m)}\big(\partial V\big) \cdot T \\ &= \nabla_V T - D_*^{(\ell,m)}\big(\nabla V\big) \cdot T \end{aligned} \tag{2a}$$

Zeigen Sie, dass

$$[L_V, L_W]T := L_V L_W T - L_W L_V T = L_{[V,W]} T \, . \tag{3}$$

Zeigen Sie damit, dass Killing-Felder eine Lie-Algebra bilden.