Übungen zur Vorlesung

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 9

Aufgabe 1

Um den Punkt p der Raum-Zeit wähle man ein Koordinatensystem wir folgt: Sei U eine (genügend kleine) Umgebung des Punktes p, so dass jeder Punkt $q \in U$ durch eine eindeutige Geodätische mit p verbindbar ist. Die Parametrisierung der Geodätischen sei festgelegt durch die Forderung, dass $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Man wählt nun in p eine orthonormierte Basis $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ und zerlegt $\dot{\gamma}(0) = n = n^\mu e_\mu$. Dann ist das Koordinatensystem $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ dadurch definiert, dass es dem Punkt q die Koordinaten $x^\mu(q) = n^\mu$ zuweist. In diesem Koordinatensystem ist dann die Parameterdarstellung der Geodätischen, die p mit q verbindet, gegeben durch $s \mapsto x^\mu(s) = sn^\mu$. Setzen Sie dies in die Geodätengleichung ein und zeigen Sie damit, dass die Christoffelsymbole als Funktionen der Koordinaten folgenden Gleichungen genügen

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(sn)n^\mu n^\nu = 0\,, \tag{1}$$

und dass Insbesondere folgt, dass die Christoffelsymbole und damit alle partiellen Ableitungen der metrischen Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ an p verschwinden. Die so konstruierten Koordinaten in U heißen geodätische Normalkoordinaten um p.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$, deren Koordinaten (x^1, x^2) um einen Punkt p so gewählt seien, dass $g_{ab}(p) = \delta_{ab}$ und alle partiellen Ableitungen von g_{ab} verschwinden. Dann kann man zeigen, dass die Gauß'sche Krümmung (das Inverse Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien) der Fläche am Punkte p gegeben ist durch

$$K(p) = \tfrac{1}{2}\big(-\partial_1^2 g_{22} - \partial_2^2 g_{11} + 2\partial_{12}^2 g_{12}\big)(p)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass in diesem Koordinatensystem die Gauß'sche Krümmung gleich der Komponente R_{1212} des Riemannschen Krümmungstensors ist. (Vgl. Aufgabe 1 von Blatt 7).

Aufgabe 3

Am Punkt p der Raum-Zeit betrachte man zwei Vektoren X, Y, so dass die Metrik $g(p)$ auf dem Unterraum $\mathrm{Span}\{X, Y\}$ nicht entartet ist. Zeigen Sie, dass letzteres äquivalent ist zu

$$g(X,X)g(Y,Y) - [g(X,Y)]^2 \neq 0\,. \tag{3}$$

Man definiert nun die Schnittkrümmung des Unterraums $\mathrm{Span}\{X, Y\}$ im Punkte p durch

$$K_p(X, Y) := \frac{R_p(X, Y, X, Y)}{g_p(X, X)\, g_p(Y, Y) - [g_p(X, Y)]^2}\,, \tag{4}$$

mit

$$R(X, Y, X, Y) := g\big(X, R(X, Y)Y\big)\,, \tag{5}$$

so dass z.B. $R(e_\alpha, e_\beta, e_\mu, e_\nu) = R_{\alpha\beta\,\mu\nu} = g_{\alpha\gamma} R^{\gamma}{}_{\beta\,\mu\nu}$. Zeigen Sie, dass $K_p(X, Y)$ nicht von der Wahl der den Unterraum $\mathrm{Span}\{X, Y\}$ erzeugenden Vektoren X und Y abhängt. Seien $\{x^\mu\}$ geodätische Normalkoordinaten um p (vgl. Aufgabe 1), so zeige man mit Hilfe von Aufgabe 2, dass die Schnittkrümmung $K_p(e_\mu, e_\nu)$ gerade der Gauß'schen Krümmung der Fläche entspricht, die von allen Geodätischen erzeugt wird, die vom Punkt p aus in allen in $\mathrm{Span}\{e_\mu, e_\nu\}$ enthaltenen Richtungen ausgehen.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass der Krümmungstensor durch die Schnittkrümmungen vollständig bestimmt ist. (Tipp: Der kovariante Krümmungstensor kann punktweise als symmetrische Bilinearform auf dem linearen Raum der antisymmetrischen Tensoren 2. Stufe aufgefasst werden: $(J, K) \mapsto R_{\alpha\beta\,\mu\nu} J^{\alpha\beta} K^{\mu\nu}$. Eine symmetrische Bilinearform ist aber durch ihre zugehörige quadratische Form vollständig bestimmt.)

Aufgabe 5

Man wähle eine orthonormierte Basis $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ am Punkte p der Raum-Zeit, so dass also $g_p(e_\mu, e_\nu) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, und zeige, dass diesbezüglich die Diagonalelemente des Einsteintensors wir folgt durch die Schnittkrümmungen festgelegt sind (im Folgenden ist nicht automatisch über wiederholte Indizes zu summieren):

$$G_{00} = -\tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} R_{k\ell\,k\ell}\,, \tag{6}$$

$$G_{ii} = -\sum_{i\neq k=1}^{3} R_{0k\,0k} + \sum_{i\neq k}^{3} \sum_{i\neq \ell}^{3} R_{k\ell\,k\ell}\,, \tag{7}$$

Interpretieren Sie diese.