Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1

Der englische Geologe und Physiker John Michell (1724-1793) schrieb 1783 folgende Zeilen an Henry Cavendish

> *„If the semi-diameter of a sphere of the same density as the Sun were to exceed that of the Sun in the proportion of 500 to 1, a body falling from an infinite height towards it would have acquired at its surface a greater velocity than that of light, and consequently supposing light to be attracted by the same force in proportion to its vis inertiae, with other bodies, all light emitted from such a body would be made to return towards it by its own proper gravity.“*

Überprüfen Sie die Zahlenangaben anhand moderner Werte für die Masse und den Radius der Sonne.

Aufgabe 2

Betrachten Sie einen Stern vom Radius R und homogener Massenverteilung ρ. Wie groß ist seine gesamte gravitative Feldenergie (=Bindungsenergie)? Angenommen der Stern verändert seinen Radius R um den kleinen Betrag $\delta R \ll R$ bei gleichbleibender Gesamtmasse, so dass nach der Änderung die Massenverteilung wieder homogen ist. Zeigen Sie, dass die Änderung der Bindungsenergie in linearer Ordung in δR wie folgt geschrieben werden kann:

$$\delta E_{\text{Bindung}} = Mc^2 \cdot \frac{\delta R}{R} \cdot \left(\frac{GM}{c^2 R}\right) \cdot \frac{3}{5}. \tag{1}$$

Wenden Sie dies auf den Fall eines (stark idealisierten) Neutronensterns an mit einer (durchschnittlichen) Massendichte $\rho = 5 \times 10^{17} \mathrm{Kg/m^3}$ und einem Radius von $12\,\mathrm{km}$. Wieviel Energie wird frei wenn dieser seinen Radius um einen Zentimeter verringert? Führt die hier gemachte Idealisierung (konstante Massendichte) zu einer Über- oder Unterschätzung des Resultats?

Aufgabe 3

Sei ϕ das Newton'sche Gravitationspotential (d.h. es erfüllt die Newton'schen Feldgleichungen) und

$$t_{ab} = \frac{1}{4\pi G}\left(\nabla_a \phi \nabla_b \phi - \tfrac{1}{2}\,\delta_{ab}\,\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi\right) \tag{2}$$

der so genannte Spannungstensor des Gravitationsfeld. Zeigen Sie

$$\nabla^a t_{ab} = \rho \, \nabla_b \phi \, . \tag{3}$$

Zeigen Sie weiter, dass die Leistung, die Sie aufwenden müssen, um die Massen entlang des Flusses des Vektorfeldes ξ umzuverteilen, gegeben ist durch

$$\dot{A} = -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^a \xi^b \, t_{ab} \, d^3x \, . \tag{4}$$

Dabei sei vorausgestzt, dass ξ außerhalb eines beschränkten Gebiets verschwindet (also kompakten Träger hat).

Welche Vektorfelder erfüllen $\nabla^a \xi^b + \nabla^b \xi^a = 0$ und warum führen diese zu $\dot{A} = 0$?

(Tipp: Um alle Vektorfelder zu erhalten, die $\nabla^a \xi^b + \nabla^b \xi^a = 0$ erfüllen (sog. Killing-Gleichng), können Sie diese Gleichung nochmals nach x^c ableiten und aus der so entstehenden Differentialgleichung 2. Ordung durch zyklische Permutation in den Indizes a, b, c zeigen, dass tatsächlich alle 2. Ableitungen der Komponentenfunktionen ξ^a verschwinden. Dazu müssen Sie voraussetzen, dass die Komponentenfunktionen mindestens zweimal stetig differenzierbar sind.)