Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurden für Lane-Emden-Sterne (d.h. innerhalb der Newton'schen Gravitationstheorie) Ausdrücken für den Radius und die Masse als Funktionen der zentralen Dichte ρ_0 abgeleitet, wobei vorausgesetzt wurde, dass der Stern durch den Fermidruck der Elektronen bei Temperatur $T = 0$ stabilisiert wird. Zeigen Sie, dass für $\gamma = 5/3$ und $\gamma = 4/3$ diese Ausdrücke in folgende Form gebracht werden können:

$$R = \begin{cases} \left(\frac{3\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma} \frac{\bar{\lambda}_e \bar{\lambda}_n}{\ell_P} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/6} \xi_1^{(\gamma=5/3)} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma} \frac{\bar{\lambda}_e \bar{\lambda}_n}{\ell_P} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/3} \xi_1^{(\gamma=4/3)} & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{1a}$$

$$M = \begin{cases} \left(\frac{3\pi}{32}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{m_P^3}{m_n^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{1/2} \left[\xi_1^2 |\Theta'(\xi_1)|\right]^{(\gamma=5/3)} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{m_P^3}{m_n^2} \left[\xi_1^2 |\Theta'(\xi_1)|\right]^{(\gamma=4/3)} & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{1b}$$

Dabei bezeichnet wie in der Vorlesung σ die Anzahl der Baryonen pro Elektron und ρ_c die kritische Massendichte

$$\rho_c := \frac{\sigma m_n}{3\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3 \approx \sigma \cdot 9{,}84 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \,. \tag{2}$$

$m_P := \sqrt{\hbar c/G}$ ist die Planck-Masse, $\ell_P := \sqrt{\hbar G/c^3}$ die Planck-Länge und $\bar{\lambda}_e := \hbar/(m_e c)$ bzw. $\bar{\lambda}_n := \hbar/(m_n c)$ sind die reduzierten Compton-Wellenlängen für das Elektron und das Nukleon.

Rechnen Sie nach, dass ($M_\odot$ bezeichnet die Masse der Sonne):

$$R = \begin{cases} \frac{1{,}99}{\sigma} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/6} \cdot 10^4 \text{ km} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ \frac{5{,}31}{\sigma} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/3} \cdot 10^4 \text{ km} & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{3a}$$

$$M = \begin{cases} \frac{2{,}73}{\sigma^2} M_\odot \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{1/2} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ \frac{5{,}73}{\sigma^2} M_\odot & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{3b}$$

Argumentieren Sie nun, dass falls der Stern durch den Fermidruck der Nukleonen stabilisiert würde, die Ausdrücke für die Radien mit $\sigma m_e/m_n \approx \sigma/1836$ und die Ausdrücke für die Massen mit σ^2 multipliziert werden müssen und ρ_c statt durch (2) gegeben zu sein nun durch den Ausdruck

$$\tilde{\rho}_c := \frac{m_n}{3\pi^2}\left(\frac{m_n c}{\hbar}\right)^3 = 6,1 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3} \tag{4}$$

ersetzt werden muss. Für Neutronensterne sollte also gelten:

$$R = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{\rho}_c}{\rho_0}\right)^{1/6} 10,8\,\mathrm{km} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ \left(\frac{\tilde{\rho}_c}{\rho_0}\right)^{1/3} 28,9\,\mathrm{km} & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{5a}$$

$$M = \begin{cases} \left(\frac{\rho_0}{\tilde{\rho}_c}\right)^{1/2} 2,73\,M_\odot & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ 5,73\,M_\odot & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{5b}$$

Welchen dieser Werte trauen Sie *nicht*? Begründen Sie dies. Wenn die zentrale Dichte ρ_0 das Drei- bis Vierfache der Dichte von Atomkernen ($2 \cdot 10^{17}$ kg $\cdot$ m^{-3}) betrüge, wie groß wären dann die Radien und die Massen der Neutronensterne? Achtung: Welcher Wert von γ ist dann relevant? Ist den entsprechenden Formeln aus (5) dann zu trauen?

Aufgabe 2

Die Differenz ΔM zwischen Neutronenmasse und der Summe von Protonen- und Elektronenmasse beträgt etwa $1,5$ Elektronenmassen. Der inverse β-Zerfall kann energetisch einsetzen, sobald die kinetische Energie der Elektronen an der Fermikante den Betrag $\Delta M c^2$ übersteigt (die Masse des Neutrinos sei hier vernachlässigt). Zeigen Sie, dass dies für Massendichten

$$\frac{\rho}{\rho_c} > \left[(2,5)^2 - 1\right]^{3/2} \approx 12 \tag{6}$$

der Fall ist, wobei ρ_c durch (2) gegeben ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie unter Annahme der Zustandsgleichung

$$p = \tfrac{1}{3}\rho c^2 \tag{7}$$

dass die *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* - Gleichung eine exakte Lösung der Form

$$\rho(r) = \frac{K}{r^2} \tag{8}$$

zulässt. Für welche K ist das zutreffend? Wie groß ist das Integral von ρ über den „Raum“ $t =$ konst. zwischen $r = 0$ und $r = R$? Welche Art von Materie würde (7) genügen?

Aufgabe 4

Betrachten Sie in der tx - Ebene des Minkowskiraums die folgende Kurve:

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \frac{c}{a} \cdot \sinh(a\tau/c)\,, \\ x(\tau) &= \frac{c^2}{a} \cdot \cosh(a\tau/c)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Hier bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit, a eine Konstante von der Dimension einer Beschleunigung und τ den Kurvenparameter. (Können Sie geometrische Charakterisierungen von a und τ angeben?) Wir nennen die Bildmenge der Kurve (9) einfach den „Beobachter“.

Charakterisieren Sie durch Angabe der Wertebereiche der Koordinaten alle Punkte der tx - Ebene, die vom Beobachter kausal beeinflusst werden können. Charakterisieren Sie ebenso alle Punkte, die ihrerseits den Beobachter kausal beeinflussen können. Was entspricht dem Schnitt der Komplemente beider Mengen? Wie verändern sich die Mengen, wenn die Bahnkurve (9) für sehr große bzw. kleine τ - Werte in eine unbeschleunigte Kurve übergeht?

Aufgabe 5

Wir betrachten eine allgemeine statische Raumzeit, deren Metrik lokal immer auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$g = \Phi^2(\vec{x})\, c^2\, dt \otimes dt - h_{ab}(\vec{x})\, dx^a \otimes dx^b\,, \tag{10}$$

wobei die Funktionen Φ und h_{ab} nicht von t abhängen. Die Weltlinien statischer Beobachter sind die Integralkurven des Vektorfeldes $u = \phi^{-1}\partial_t$. Zeigen Sie, dass die Beschleunigung $a := \nabla_u u$ gegeben ist durch

$$a = c^2\, h^{ab}\big(\partial_b \ln(\Phi)\big)\partial_a\,. \tag{11}$$

Für die äußere Schwarzschildgeometrie ist $\Phi^2 = 1 - (2m/r)$. Wie verhält sich die Beschleunigung für $r \searrow 2m$? Was passiert mit dem Killing-Vektorfeld $K = \partial/\partial t$ wenn man sich von größeren r-Werten her der Hyperfläche $r = 2m$ nähert?