Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1

Welche Einschränkung an den Radius eines sphärisch-symmetrischen Sterns konstanter Dichte resultiert aus der Forderung, der Druck p möge den Wert $\rho_0 c^2$ nicht übersteigen? Was ist dann die maximale Rotverschiebung, mit der ein Beobachter im Unendlichen Licht von der Oberfläche des Sterns wahrnimmt?

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde anhand der inneren Schwarzschildlösung gezeigt, dass die Geometrie im Innern eines sphärisch-symmetrischen Sterns konstanter Dichte die einer Kalotte einer runden 3-Sphäre ist. Bis zu welchem Breitengrad kann sich diese Kalotte maximal erstrecken?

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde die TOV-Gleichung (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) für verschwindende kosmologische Konstante Λ abgeleitet. Zeigen Sie, dass im Falle $\Lambda \neq 0$ die entsprechende Gleichung für den Druckgradienten wie folgt lautet:

$$-p'(r) = G \cdot \frac{M(r) + 4\pi r^3 p(r)/c^2 - \frac{c^2}{3G}\Lambda r^3}{r^2\left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right]} \,. \tag{1}$$

Gehen Sie dazu von folgender Beobachtung aus: Die Einstein-Gleichung mit kosmologischer Konstante

$$G_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu} = \kappa\, T_{\mu\nu} \tag{2}$$

kann in der Form

$$G_{\mu\nu} = \kappa\, \tilde{T}_{\mu\nu} \tag{3}$$

mit

$$\tilde{T}_{\mu\nu} := T_{\mu\nu} + \kappa^{-1} \Lambda g_{\mu\nu} \tag{4}$$

geschrieben werden. Sei nun T der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2) u_\mu u_\nu - p\, g_{\mu\nu} \,, \tag{5}$$

wobei ρ die Massendichte, p der Druck und u das Vierer-Geschwindigkeitsfeld der Strömung ist. Dann ist

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = (\tilde{\rho} + \tilde{p}/c^2) u_\mu u_\nu - \tilde{p}\, g_{\mu\nu} \tag{6}$$

mit

$$\tilde{\rho} := \rho + \Lambda/(\kappa c^2)\,, \tag{7a}$$
$$\tilde{p} := p - \Lambda/\kappa\,. \tag{7b}$$

Argumentieren Sie nun, dass man um (1) zu erhalten in der TOV-Gleichung für $\Lambda = 0$ nur die Ersetzung (7) vornehmen muss, wobei die Funktion $M(r)$ entsprechend ihrer Definition ebenfalls ersetzt wird.

Spezialisieren Sie nun auf den für $\Lambda = 0$ bereits in der Vorlesung explizit behandelten Fall inkompressibler Materie

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 > 0 & \text{für} \quad r \leq R \\ 0 & \text{für} \quad r > R \end{cases} \tag{8}$$

und integrieren Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung die Gleichung (1). (Achtung: Der Radius des Sterns ist nach wie vor durch $p(R) = 0$ charakterisiert, also durch $\tilde{p}(R) = -\Lambda/\kappa$.) Für welche Sternradien R ist bei gegebenem ρ_0 der Druck im Zentrum endlich?

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass man jede sphärisch-symmetrische räumliche Metrik

$$g_R = f^2(r)\, dr^2 + g^2(r)\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\big) \tag{9}$$

durch Verwendung einer neuen Radialkoordinate $r_* = h(r)$ in manifest räumlich konform-flacher Gestalt schreiben kann:

$$g_R = F^2(r_*)\Big[dr_*^2 + r_*^2\big(\,d\theta^2 + r_*^2\, \sin^2\theta\, d\varphi^2\big)\Big]\,. \tag{10}$$

Führen Sie dies für die äußere Schwarzschildmetrik explizit durch und zeigen Sie damit, dass diese in der Form

$$g = \left[\frac{1 - \frac{r_S}{4r}}{1 + \frac{r_S}{4r}}\right]^2 c^2\, dt^2 - \left[1 + \frac{r_S}{4r}\right]^4 \big(dr_*^2 + r_*^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\big) \tag{11}$$

geschrieben werden kann. Diskutieren Sie die Abbildung $r_* \to r$ für $r_* \in (0, \infty)$.

Zeigen Sie, dass die Abbildungen (Inversion an der Sphäre $r_* = r_S/4$)

$$\begin{aligned} (t, r_*, \theta, \varphi) &\mapsto \left(t\,,\ \frac{(r_S/4)^2}{r}\,,\ \theta, \varphi\right) \\ (t, r_*, \theta, \varphi) &\mapsto \left(t\,,\ \frac{(r_S/4)^2}{r}\,,\ \pi - \theta, \varphi + \pi\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Isometrien der Schwarzschildmetrik sind. Machen Sie sich die Geometrie der Hyperfläche t = konst. qualitativ anhand eines Einbettungsdiagramms klar, wobei Sie die erste Isometrie ausnutzen können. Welche geometrischen Aussagen können Sie über die 2-Sphäre $r_* = r_S/4$ treffen?

Aufgabe 5 (Für Differentialgeometrie-Erfahrene)

Wir betrachten eine allgemeine statische Raumzeit, deren Metrik lokal immer auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$g = \Phi^2(\vec{x})\, c^2\, dt \otimes dt - h_{ab}(\vec{x})\, dx^a \otimes dx^b\,, \tag{13}$$

wobei die Funktionen Φ und h_{ab} nicht von t abhängen. Führen Sie eine orthonormale Basis $\{\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ von Kovektorfeldern ein, so dass

$$\theta^0 = \Phi\, c dt \quad \text{und} \quad h_{ab}\, dx^a \otimes dx^b = \sum_{a=1}^{3} \theta^a \otimes \theta^a\,. \tag{14}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Cartanschen Strukturgleichungen, dass der Ricci-Tensor der Metrik g gegeben ist durch

$$R_{00} = \frac{\Delta^{(h)}\Phi}{\Phi}\,, \quad R_{0a} = 0\,, \quad R_{ab} = R^{(h)}_{ab} - \frac{\nabla^{(h)}_a \nabla^{(h)}_b \Phi}{\Phi}\,. \tag{15}$$

Dabei beziehen sich alle Komponenten auf die orthonormale Kobasis der θ^a, $\nabla^{(h)}_a$ sind die kovarianten Ableitungen in den 3-dimensionalen Flächen $t =$ konst. mit Metrik h, $R^{(h)}_{ab}$ ist ihr Ricci-Tensor und $\Delta^{(h)} := h^{ab}\nabla^{(h)}_a \nabla^{(h)}_b$ ihr Laplace Operator.

Untersuchen Sie mit Hilfe von (15) die überall regulären, statischen Lösungen der Vakuum (d.h. $T_{ab} = 0$) Einsteingleichungen. Zeigen Sie damit den Satz von Einstein-Pauli (1943), dass, falls die Hyperflächen $t =$ konst. diffeomorph zu $\mathbb{R}^3$ sind, die einzige solche Lösung, die räumlich-asymptotisch flach ist, durch den Minkowskiraum gegeben ist. Was bedeutet das physikalisch?