

Übungen zur Vorlesung  
**Theorie der schwarzen Löcher**  
von DOMENICO GIULINI

**Blatt 5**

**Aufgabe 1**

In der äußeren Schwarzschildgeometrie ruhe ein Beobachter relativ zu den Schwarzschildkoordinaten bei  $r = R > r_S$ . Diejenigen Nullgeodätischen seines Rückwärtslichtkegels, die bei Rückverfolgung ein Gebiet beschränkter  $r$ -Werte nicht verlassen, nennt man den „Schatten“ des Zentralobjektes. Begründen Sie diese Terminologie.

Zeigen Sie, dass der Schatten im vorliegenden Fall ein Kreiskegel mit Öffnungswinkel  $\alpha$  (Winkel zwischen Symmetrieachse und Kegelmantel) füllt, wobei

$$\sin \alpha = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{r_S}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}}. \quad (1)$$

Diskutieren Sie die Veränderung des Schattens als Funktion des Radius'  $r$ , wenn Sie sich von Werten  $r > 3r_S/2$  kommend über  $r = 3r_S/2$  dem Wert  $r = r_S$  nähern. Was passiert bei  $r = r_S$ ?

*Anleitung: Um (1) abzuleiten benutzen Sie die in der Vorlesung besprochene Methode des effektiven Potentials. Für lichtartige Geodätische gilt:*

$$\dot{r}^2 + \underbrace{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \cdot \frac{\ell^2}{r^2}}_{V_{\text{eff}}(r)} = C, \quad (2)$$

mit

$$\ell = r^2 \dot{\varphi}. \quad (3)$$

*Ein Punkt bezeichnet stets die Ableitung nach dem gewählten affinen Parameter.  $C$  und  $\ell$  sind entlang einer jeden Bahn konstant.*

*Betrachten Sie nun einen Lichtstrahl, der mit einem Winkel  $\alpha$  zur nach innen orientierten radialen Richtung beim Radius  $r = R$  abgeschossen werde. Machen Sie sich klar, dass dann für die radiale Anfangsgeschwindigkeit gilt*

$$\dot{r}|_{r=R} = -\frac{\ell}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} \cdot \cot \alpha. \quad (4)$$

*Bestimmen Sie damit die Konstante  $C$  in (2) und dann den Grenzwinkel  $\alpha$ , für den die Bewegung das Maximum von  $V_{\text{eff}}$  bei  $r = 3r_S/2$  überschreitet (falls  $R > 3r_S/2$ ) bzw. nicht überschreitet (falls  $R < 3r_S/2$ ).*

## Aufgabe 2

Eine 20 Meter lange Eisenbahnschiene falle in Längsrichtung radial und frei im Gravitationsfeld eines Neutronensterns mit Masse  $M = 1,5 M_{\odot}$  und Radius  $R = 13 \text{ km}$ . Der Neutronenstern sei nicht rotierend, so dass sein äußeres Gravitationsfeld durch die äußere Schwarzschildlösung gegeben ist. Schätzen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung diskutierten Methode ab, ob die Schiene in Längsrichtung zerissen wird, und wenn ja in wie viele Stücke, bevor sie auf die Oberfläche des Neutronensterns trifft.

*Hinweis: Die Zerreißspannung und Dichte von Stahl sind  $\sigma = 7 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  und  $\rho = 7,8 \times \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .*

## Aufgabe 3

Bezüglich der orthonormierten Kobasis

$$\begin{aligned}\Theta^0 &= \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c dt, \\ \Theta^1 &= \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr, \\ \Theta^2 &= r d\theta, \\ \Theta^3 &= r \sin(\theta) d\varphi,\end{aligned}\tag{5}$$

sind die nicht-verschwindenden Komponenten des Krümmungstensors der äußeren Schwarzschildgeometrie gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{r_S}{r^3} &= R_{0101} \\ &= -R_{2323} \\ &= 2 R_{1212} = 2 R_{1313} \\ &= -2 R_{0202} = -2 R_{0303}.\end{aligned}\tag{6}$$

Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass der Krümmungstensor invariant unter radialen Lorentz-Boosts ist.

*Hinweis: Die Rechnung kann man erheblich abkürzen, wenn man  $\Theta^0$  und  $\Theta^1$  durch  $\Theta^{\pm} := \frac{1}{2}(\Theta^0 \pm \Theta^1)$  ersetzt, d.h. den Krümmungstensor nach  $\{\Theta^+, \Theta^-, \Theta^2, \Theta^3\}$  entwickelt. Dann sieht man die Invarianz ohne weitere Rechnung aus der Invarianz von  $\Theta^+ \otimes \Theta^-$ .*