Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von Domenico Giulini

Blatt 6

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde die Kruskal-Mannigfaltigkeit (M, g) besprochen, wobei die Mannigfaltigkeit M die Produktform $\mathbb{R}^2 \times S^2$ hat und die Metrik g bezüglich einer globalen Karte (u, v) auf $\mathbb{R}^2$ und Polarkoordinaten (θ, φ) auf der 2-Sphäre wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$g = f^2(u,v)\big(dv^2 - du^2\big) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{1a}$$

Dabei ist r als Funktion von u und v zu verstehen, gemäß

$$\begin{gathered} u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)\exp\big(r/r_s\big) =: A(r/r_s) \\ \Rightarrow r = r(u,v) := r_s A^{-1}(u^2 - v^2)\,. \end{gathered} \tag{1b}$$

f ist eine Funktion der Variablen u und v und gegeben durch

$$f^2(u,v) = 4\frac{r_s^3}{r(u,v)}\exp\big(-r(u,v)/r_s\big)\,. \tag{1c}$$

Betrachten Sie nun folgende drei Selbst-Abbildungen der Kruskal Mannigfaltigkeit

$$T_v\ : (v\,,\,u\,,\,\theta\,,\,\varphi) \to (-v\,,\,u\,,\,\theta\,,\,\varphi)\,, \tag{2a}$$

$$T_u\ : (v\,,\,u\,,\,\theta\,,\,\varphi) \to (v\,,\,-u\,,\,\theta\,,\,\varphi)\,, \tag{2b}$$

$$R\ : (v\,,\,u\,,\,\theta\,,\,\varphi) \to (v\,,\,u\,,\,\pi-\theta\,,\,\varphi+\pi)\,. \tag{2c}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildungen Isometrien sind und machen Sie sich deren geometrische Bedeutung klar. Welche unabhängigen Kombinationen dieser Abbildungen gibt es? Diskutieren Sie alle(!) Kombinationen nach

1. Erhalt der räumlichen, zeitlichen und raum-zeitlichen Orientierung,
2. Erhalt des global definierten Killing-Vektorfeldes (wie man die Killing-Eigenschaft $L_K g = 0$ ohne größere Rechnung sofort sehen kann wurde in der Vorlesung erklärt),
$$K = v\partial_u + u\partial_v, \tag{3}$$
3. Fixpunktmenge, insbesondere wann Fixpunktfreiheit gilt.

Ist C eine fixpunktfreie Kombination, dann ist der Quotient $\tilde{M} := M/\!\sim$ nach der Äquivalenzrelation $p \sim q \Leftrightarrow C(p) = q$ wieder eine Mannifgaltigkeit auf der wegen der isometrischen Eigenschaft die Metrik g eindeutig eine Metrik $\tilde{g}$ definiert (welche?). Warum ist es klar, dass $(\tilde{M}, \tilde{g})$ wieder die Vakuum-Einsteingleichungen löst? Für welches fixpunktfreie C definiert das Killingfeld (3) von (M, g) nicht nur ein *lokales* sondern sogar ein *globales* Killingfeld $\tilde{K}$ von $(\tilde{M}, \tilde{g})$?

Aufgabe 2

Benutzt man räumliche Polarkoordinaten, so nimmt die Metrik des Minkowski-Raumes folgende Form an:

$$g = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\big)\,. \tag{4}$$

Betrachten Sie die folgende Koordinatentransformation $(t, r) \to (T, R)$:

$$cT := \tan^{-1}\Big(\tfrac{1}{2}(ct + r)\Big) + \tan^{-1}\Big(\tfrac{1}{2}(ct - r)\Big)\,, \tag{5a}$$

$$R := \tan^{-1}\Big(\tfrac{1}{2}(ct + r)\Big) - \tan^{-1}\Big(\tfrac{1}{2}(ct - r)\Big)\,, \tag{5b}$$

mit dem Wertebereich

$$U := \big\{(cT, R) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \,:\, -\pi < cT \pm R < \pi\big\}\,. \tag{5c}$$

Zeichnen Sie das Gebiet $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ mit Rand.

Zeigen Sie, dass in diesen Koordinaten die Minkowski-Metrik (4) die folgende Form annimmt:

$$g = \Omega^2 \tilde{g}\,, \tag{6a}$$

mit

$$\Omega : U \to \mathbb{R}_+\,, \qquad \Omega := \frac{1}{\cos\big(\tfrac{1}{2}(cT + R)\big)\,\cos\big(\tfrac{1}{2}(cT - R)\big)} \tag{6b}$$

und

$$\tilde{g} = c\,dT^2 - dR^2 - \sin^2 R\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\big)\,. \tag{6c}$$

Machen Sie sich klar, dass die Metrik $\tilde{g}$ die natürliche Geometrie der Raumzeit $\tilde{M} = \mathbb{R} \times S^3$ beschreibt, hier eingeschränkt auf die offene Untermenge $U \times S^2$. Dabei steht S^3 hier für die runde 3-Sphäre mit Radius 1. Wie liegt das Gebiet $U \times S^2$ und sein Rand in $\tilde{M}$. Zeichnen Sie ein Bild! Welche spezielle Geometrie wird durch $\tilde{g}$ auf dem Rand induziert?

Aufgabe 3

Das Duale $\star A$ einer 2-Form A (antisymmetrischer Tensor 2. Stufe) ist (in 4 Dimensionen) definiert durch

$$\star A_{ab} := \tfrac{1}{2}\epsilon_{abcd}A^{cd}\,. \tag{7}$$

Hierbei ist ϵ die zur Metrik g gehörige Volumenform (Levi-Civita Tensor). Diese Definition ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig.

Zeigen Sie, dass $\star \circ \star = -\mathrm{Id}$ (minus die Identität).

Zeigen Sie weiter: Sind A und B 2-Formen, so gilt

$$\star\,[A, B] = [\star A, B] = [A, \star B]\,, \tag{8a}$$

$$A \cdot B - (\star B) \cdot (\star A) = \tfrac{1}{2} g\, \mathrm{Sp}(A \cdot B)\,. \tag{8b}$$

Hier und im Folgenden benutzen wir folgende abkürzende Schreibweisen: $A \cdot B$ für den Tensor mit Komponenten $(A \cdot B)_{ab} = A_{an} B^{n}{}_{b}$, A^2 für $A \cdot A$, entsprechend A^4 für $A \cdot A \cdot A \cdot A$, $[A, B]$ für den Kommutator $A \cdot B - B \cdot A$ und $\mathrm{Sp}(X)$ für die Spur $g^{ab} X_{ab}$ eines Tensors X.

Beweisen Sie mit Hilfe von (8), dass

$$A \cdot \star A \;=\; \star A \cdot A = \tfrac{1}{4} g \,\mathrm{Sp}(A \cdot \star A)\,, \tag{9a}$$
$$(\star A)^2 \;=\; A^2 - \tfrac{1}{2} g \,\mathrm{Sp}(A^2)\,, \tag{9b}$$

und daraus weiter:

$$A^4 \;=\; g\, I_2^2 + 2A^2\, I_1\,, \tag{10a}$$
$$(\star A)^4 \;=\; g(I_2^2 + 4I_1^2) - 2A^2\, I_1\,. \tag{10b}$$

Dabei bezeichnen I_1 und I_2 die beiden Invarianten

$$I_1 := \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sp}(A^2)\,, \tag{11a}$$
$$I_2 := \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sp}(A \cdot \star A)\,. \tag{11b}$$

Zeigen Sie, dass $I_{1,2}$ die einzigen unabhängigen polynomialen Invarianten der 2-Form A sind . Zeigen Sie weiter, dass der spurfreie Anteil von A^2, $T := A^2 - \frac{1}{4} g\,\mathrm{Sp}(A^2)$, auch geschrieben werden kann als

$$T = \tfrac{1}{2}(A^2 + \star A^2) = \tfrac{1}{2}(A + i \star A)(A - i \star A) \tag{12}$$

und dass sein Quadrat die einfache Form hat

$$T^2 = g(I_1^2 + I_2^2)\,. \tag{13}$$

(12)

Zeigen Sie schließlich, dass T invariant unter Transformationen der folgenden Form (sog. Dualitätstransformationen) ist:

$$\big(F + i \star F\big) \mapsto \exp(i\alpha)\big(F + i \star F\big)\,. \tag{14}$$

Was hat das alles mit Elektrodynamik zu tun? Was bedeutet die Invarianz unter Dualitätstransformationen für die Einstein-Maxwell-Gleichungen?

Aufgabe 4

Die zwei Parameter (m, q) der Reißner-Nordstrøm Metrik, die beide die physikalische Dimension einer Länge haben, können wie in der Vorlesung angegeben durch die Masse M und die Ladung Q in MKSA-Einheiten ausgedrückt werden. Zeigen Sie, dass dann folgende Relationen gelten (Achtung: Das erste Gleichheitszeichen ist wörtlich gemeint!):

$$\frac{q}{m} = \sqrt{\frac{10^{-7} c_*^2}{G_*}} \cdot \frac{Q_*}{M_*} \approx 1{,}16 \times 10^{10} \cdot \frac{Q_*}{M_*}\,. \tag{15}$$

Hier bezeichnet ein angehängter Stern den numerischen Wert der betreffenden Größe im MKSA-System.

Berechnen Sie das Verhältnis für das Elektron. Denken Sie sich ein anschauliches Beispiel aus, in dem $q/m \approx 1$ gilt. Gibt es ein Ihnen bekanntes elektrisch geladenes Elementarteilchen mit $|q| < m$? Welche Bedingung müsste die Masse eines ungeladenen Elementarteilchens erfüllen, damit sein Schwarzschild-Radius r_S kleiner als seine Compton-Wellenlänge λ ist? Würden Sie in diesem Falle immer noch einen Ereignishorizont bei $r = r_S$ vermuten?

Berechnen Sie in der Reißner-Nordstrøm-Geometrie die radiale Distanz eines Punktes (R, θ, φ) in der $t = 0$ Hyperfläche vom Zentrum $r = 0$ für den Fall $|q| > m$. Berechnen Sie analog die radiale Distanz eines Punktes (R, θ, φ) mit $R > m$ zu (m, θ, φ) für den Fall $|q| = m$. Was fällt Ihnen auf?