Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 7

Aufgabe 1

Die Parameter m und a bezeichnen wie in der Vorlesung die Masse und das Verhältnis von Drehimpulsbetrag pro Masse irgend eines Köprpers. Berechnen Sie das Verhältnis a/m für

1. das Elektron,
2. die Erde,
3. die Sonne,
4. die Milchstraße.

entweder mit exakt gemessenen oder „vernünftig“ geschätzten Werten für die entsprechenden Größen.

Aufgabe 2

In einer geeigneten offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ (siehe unten) führen wir neben den üblichen Cartesischen Koordinaten (x, y, z) neue Koordinaten (r, θ, φ) (mit den üblichen Wertebereichen wie bei sphärischen Polarkoordinaten) ein durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} x &= f(r)\ \sin\theta\ \cos\varphi\,, \\ y &= f(r)\ \sin\theta\ \sin\varphi\,, \\ z &= r\ \cos\theta\,. \end{aligned} \tag{1a}$$

Zeigen Sie, dass die Koordinatenvektorfelder $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\theta$, , $\partial/\partial\varphi$, genau dann paarweise aufeinander senkrecht stehen, wenn $f^2(r) = r^2 + c$, mit $c \in \mathbb{R}$ konstant. Wir wählen $c = \varepsilon^2 > 0$, so dass

$$f(r) = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2}\,. \tag{1b}$$

Zeigen Sie damit, dass die Flächen $r =$ konst. Rotationsellipsoide mit großer Halbachse $a = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2}$ und kleiner Halbachse $b = r$ sind, wobei letztere entlang der Rotationsachse (z-Achse) liegt. Zeigen Sie weiter, dass die Flächen $\theta =$ konst. einschalige Rotationshyperboloide mit den asymptotischen Kegeln $z/\sqrt{x^2 + y^2} = \cot\theta$ sind. Für $r \to 0$ entarten die Rotationsellipsoide zu einer Kreisscheibe vom Radius ε in der Ebene $z = 0$, so dass das oben erwähnte Gebiet $U \subset \mathbb{R}^3$ des durch (1) definierten Koordinatensystem gerade das Komplement dieser Kreisscheibe im $\mathbb{R}^3$ ist.

Ersetzen Sie nun in der Minkowski-Metrik

$$g_M = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2}$$

die räumlichen Koordinaten (x, y, z) durch (r, θ, φ) gemäß (1) und zeigen Sie, dass die so erhaltene Form gerade der Kerr-Newman-Metrik in Boyer-Lindquist Koordinaten für $m = q = 0$ und $a = \varepsilon$ entspricht. Da alle Ellipsoide $r =$ konst. gleiche Foki haben, nennt man das Koordinatensystem *konfokale elliptische Koordinaten*.

Aufgabe 3

(Nur für Differentialgeometrie-Begeisterte) Zeigen Sie: Schränkt man die Kerr-Newman-Metrik auf die durch $t = 0$ und $r = r_+ := m + \sqrt{m^2 - a^2 - q^2}$ definierte zweidimensionale raumartige Fläche Σ ein, so hat diese die Form (mit positivem Vorzeichen versehen)

$$h := -g|_{T\Sigma} = \rho^2\,d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(r_+^2 + a^2)^2\,d\varphi^2\,. \tag{3}$$

Dabei ist wie in der Vorlesung

$$\rho \;:=\; \sqrt{r_+^2 + a^2\,\cos^2\theta}\,, \tag{4a}$$

$$r_+ \;:=\; m + \sqrt{m^2 - a^2 - q^2}\,, \tag{4b}$$

wobei

$$m^2 > a^2 + q^2 \tag{4c}$$

vorausgesetzt sei. Zeigen Sie, dass die Gauß'sche Krümmung der Fläche Σ gegeben ist durch

$$K = R_{1212} = (r_+^2 + a^2)\cdot\frac{r_+^2 - 3a^2\,\cos^2\theta}{\left[r_+^2 + a^2\,\cos^2\theta\right]^3} \tag{5}$$

(Tipp: Die Gauß'sche Krümmung ist gleich der einzigen unabhängigen Komponente R_{1212} des Riemann'schen Krümmungstensors bezüglich einer orthonormierten Basis.)

Zeigen Sie, dass das Flächenintegral von K über Σ (bezüglich des durch die Metrik (3) induzierten Maßes) den von allen Parametern (m, a, q) *unabhängigen* Wert 4π hat. Wundert Sie das? Schließen Sie weiter, dass die Fläche Σ topologisch eine 2-Sphäre ist. (Tipp: Satz von Gauß & Bonnet)

Die Gauß'sche Krümmung kann unter Umständen in Umgebungen der Pole $\theta = 0, \pi$ negativ werden. Zeigen Sie für den Fall verschwindender Ladung $(q = 0)$, dass dies genau dann passiert, wenn

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot m < |a| < m\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie zuletzt, dass sich die Region negativer Krümmung maximal bis zum $54,73561...$ Breitengrad (nördlich und südlich) erstreckt, dass also ein symmetrischer Streifen um den Äquator von insgesamt über 70 Breitengraden immer positive Krümmung besitzt.

Aufgabe 4

Eine Anzahl $n = 2$ von ungeladenen drehimpulslosen schwarzen Löchern gleicher Masse kollabiere radial aus dem Zustand relativer Ruhe und verschmelze zu einem einigen schwarzen Loch. Leiten Sie mit Hilfe des Hawking'schen Oberflächensatzes eine obere Schranke für die dabei abgestrahlte Energie ab. Verallgemeinern Sie dies auf $n > 2$.

Aufgabe 5

Einem ungeladenen schwarzen Loch der Kerr-Familie werde Rotationsenergie entzogen. Leiten Sie mit Hilfe des Hawking'schen Oberflächensatzes wieder eine obere Schranke für die dabei entnehmbare Energie ab. Wie viel Prozent der Anfangsenergie beträgt diese im optimalen Fall $|a| = m$?

Aufgabe 6

Zwei ungeladene schwarze Löcher der Kerr-Familie mit Parametern (m_1, a_1) und (m_2, a_2) verschmelzen zu einem schwarzen Loch mit Parametern (m, a). Zeigen Sie, dass ein minimales m (und damit die größte Energieabstrahlung) für $a = 0$ erreicht wird. Zeigen Sie dann weiter, dass für gegebenes m mit $a = 0$ die Summe $m_1 + m_2$ dann am kleinsten ist, falls $|a_i| = m_i$ für $i = 1, 2$. Welcher Bruchteil der Gesamtenergie kann also in diesem optimalen Fall höchstens abgestrahlt werden? Vergleichen Sie dies mit dem Ergebnis aus Aufgabe 4.

Aufgabe 7

In der Vorlesung wurde für schwarze Löcher vom Kerr-Newman Typ folgender Ausdruck für das Differential der Masse $m(A, \ell, q)$ als Funktion der Oberfläche A, des Drehimpulses $\ell := ma$ und der Ladung q (in geometrischen Einheiten) abgeleitet:

$$dm = \kappa\, dA + \Omega_H\, d\ell + \Phi\, dq\,. \tag{7a}$$

Dabei waren

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}\,, \tag{7b}$$

$$\Phi = \frac{r_+\, q}{r_+^2 + a^2}\,, \tag{7c}$$

die Winkelgeschwindigkeit und das elektrische Potential des Horizontes.

Zeigen Sie anhand (7), dass $dA \geq 0$ äquivalent ist zu

$$d(m^2) \geq \left(m/r_+\right)^2 d(a^2) + \left(m/r_+\right) d(q^2)\,. \tag{8}$$

Beweisen Sie damit den Satz, dass (hinreichend glatte) Prozesse innerhalb der Kerr-Newman Familie, die $dA \geq 0$ genügen, niemals von einem unter-extremen ($m^2 < a^2 + q^2$) zu einem über-extremen ($m^2 > a^2 + q^2$) schwarzen Loch führen können.