Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 10

Aufgabe 1

Verallgemeinern Sie die in der Vorlesung aus dem Hawking'schen Oberflächensatz abgeleitete obere Schranke an die maximale Energieausbeute bei der Verschmelzung zweier Schwarzer Löcher auf den Fall von beliebig vielen (n) Schwarzen Löchern. Beschränken Sie sich dabei (wie in der Vorlesung) auf den einfachen Fall, in dem sowohl die einlaufenden als auch das entstehende Schwarze Loch vom Schwarzschild-Typ (also ohne Ladung und Drehimpuls) sind.

Aufgabe 2

Ein Teilchen T_1 fällt frei im Gravitationsfeld eines Kerr Schwarzen Lochs von außen durch die Ergosphäre und zerfällt, noch bevor es durch den den Ereignishorizont tritt, also innerhalb der Ergoregion, in zwei Teilchen: $T_1 \to T_2 + T_3$. Im Zerfallsereignis gilt die Erhaltung des Viererimpulses: $p_1 = p_2 + p_3$. Seien, wie in der Vorlesung, $K_1 = \partial/\partial ct$ und $K_2 = \partial/\partial\varphi$ die Killing-Vektorfelder der Zeittranslation und Drehung.

Allgemein bezeichnen wir mit $E_i := g(p_i, K_1)$ die Energie und mit $J_i := -g(p_i, K_2)$ den Drehimpuls des i-ten Teilchens. (Das Minuszeichen in der Definition von J_i resultiert daraus, dass in unserer Vorzeichenkonvention das Skalarprodukt raumartiger Vektoren *negativ*-definit ist.) Wir nehmen an, der Zefallsprozess sei so, dass $E_3 < 0$ und T_3 den Horizont durchdringt (ins Schwarze Loch fällt) während T_2 die Ergoregion wieder nach außen verlässt. Zeigen Sie, dass dann nicht nur die Energie des Schwarzen Lochs durch Absorption von T_2 verringert wird sondern notwendig auch dessen Drehimpuls.

Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass der Horizont $r = r_+$ ja gerade die Grenzfläche ist, außerhalb der $K = K_1 + \Omega_H K_2$ in der Ergoregion zeitartig und zukunftsgerichtet ist.

Aufgabe 3

Leiten Sie aus dem Hawking'schen Oberflächensatz ab, dass die maximale Energieausbeute $\Delta E/E$, die man durch "Abbremsen" eines Kerr Schwarzen Lochs (vgl. Aufgabe 2) erreichen kann, gegeben ist durch $(\sqrt{2} - 1)/\sqrt{2} \approx 0,29$.