Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 11

Aufgabe 1

In der Kerr-Geometrie bewegen sich außerhalb der Ergoregion zwei stationäre Beobachter, Alice und Bob, entlang der Integralkurven der Killing-Felder $K_A = \partial/\partial ct$ bzw. $K_B = \partial/\partial ct + \Omega\partial/\partial\varphi$, ausgehend von einem gemeinsamen Raum-Zeit Ereignis (sie haben die gleichen festen Koordinaten r und θ) bei dem beide ihre Uhren auf Null stellen. Welche Zeiten τ_A bzw. τ_B zeigen die Uhren bei ihrem ersten Zusammentreffen nach dem Trennungsereignis? (Es ist natürlich vorausgesetzt, dass Ω in Abhängigkeit von r und θ so gewählt ist, dass K_B zeitartig ist.)

Aufgabe 2

Um das Kerr Schwarze Loch sei bei festem r und θ ein kreisförmiges Glasfaserkabel gelegt, in das Bob, der sich wie in Aufgabe 1 entlang einer Integralkurve von K_B bewegt, gleichzeitig zwei Lichtsignale einspeist, die sich in entgegengesetzten Richtungen entlang des Kabels um das Loch ausbreiten und wieder zu Bob zurückkehren. Welche Differenz misst Bob für die Wiederkehrzeiten der beiden gegenläufigen Signale? Bei welchem Ω verschwindet diese Differenz und wie groß ist dann Bobs Drehimpuls? Welche Kriterien fallen Ihnen ein, um sinnvoll den Begriff des *nichtrotierenden stationären* Beobachters zu definieren?

Aufgabe 3

In der Quantenelektrodynamik gibt es eine obere Schranke E_S an die elektrische Feldstärke, oberhalb der spontan e^+e^--Paare entstehen und somit das QED-Vakuum zerfällt. Man nennt E_S den *Schwinger Limit*. Dieser ist gegeben durch

$$E_s := \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} \,. \tag{1}$$

Dabei ist m_e die Masse des Elektrons und e der Betrag seiner Ladung. E_S ist gerade die Feldstärke, bei der eine Verschiebung einer Ladung e um die Strecke $\bar{\lambda}_e = \hbar/m_e c$ entgegen der Feldrichtung die Arbeit $m_e c^2$ kostet. (Ist λ_e die Comptonwellenlänge des Elektrons, dann ist $\bar{\lambda}_e := \lambda_e/2\pi$.)

Betrachten Sie nun die von den Parametern $m = M \cdot G/c^2$ und $q = Q \cdot \sqrt{G/4\pi\varepsilon_0 c^4}$ abhängige Schar von Reissner-Nordström Lösungen mit Ereignishorizont; d.h. im Bereich $|q| \leq m$. Wir fragen uns, für welche Massenwerte M dieser Schar die elektrische Feldstärke auf oder außerhalb des Ereignishorizontes den Wert E_S erreicht. Zeigen Sie, dass das genau dann der Fall ist, wenn M kleiner oder gleich einer kritischen Masse M_* ist, die Sie als Funktion von m_e, der Planck-Masse $m_P := \sqrt{\hbar c/G}$ und der Feinstrukturkonstante $\alpha := e^2/(\hbar c 4\pi\varepsilon_0)$ bestimmen sollen.

(Tipp: In der Vorlesung wurde der Faraday-Tensor des elektromagnetischen Feldes der Reissner-Nordström-Schar angegeben. Lesen Sie daraus den Betrag der elektrischen Feldstärke ab und zeigen Sie zunächst, dass dieser im Bereich $r \geq r_+$ maximal wird für $r = r_+$ und für $q^2 = m^2$. Jetzt geht's weiter mit elementarer Algebra.)