Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 2

Aufgabe 1

Das in der Vorlesung angegebene „heuristische Verfahren" zur Bestimmung einer Grenzmasse eines entarteten Fermionensterns kann auch auf wasserstoffähnliche Atome angewandt werden. Dazu betrachte man die Energie (der Einfachheit halber werde nur die radiale Bewegung betrachtet)

$$E(r,p) = \left[\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2\right] - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1}$$

Dabei ist der Ausdruck in der eckigen Klammer die speziell-relativistische kinetische Energie als Funktion des Impulses.

Zur größenordnungsmäßigen Abschätzung der Grundzustandsenergie ersetzen Sie nach der Unschärferelation p durch $\hbar/r$, so dass E eine reine Funktion von r wird. Wir interessieren uns für die Minima dieser Funktion.

Betrachten Sie zuerst den nichtrelativistischen Fall (NR), für den Sie die kinetische Energie in (1) durch $p^2/2m$ annähern. Zeigen Sie, dass $E(r)$ ein Minimum bei $r = r_0 := a_0/Z^2$ mit dem Energiewert $E = E_0 := -Z^2 R_y$ hat. Hier bezeichnen $a_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/e^2m$ den Bohr'schen Radius und $R_y := me^4/8\varepsilon_0^2h^2$ die Rydberg-Energie. Zeigen Sie, dass $p_0 = \hbar/r_0 \ll mc$ auf die Bedingung $Z < \alpha^{-1}$ führt, wobei $\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c \approx 1/137$ die Feinstrukturkonstante ist.

Betrachten Sie nun (1) im ultrarrelativistischen Fall und zeigen Sie analog zur Vorlesung, dass das System instabil wird für $Z > 1/\alpha$. Wie genau geht das Argument?

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde die Lane-Emden-Gleichung

$$\xi^{-2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d}{d\xi}\Theta + \Theta^n = 0 \tag{2}$$

abgeleitet. In dieser ist n der Polytropenindex, der mit dem Exponenten γ der Zustandsgleichung $p = \kappa\rho^\gamma$ durch $n = (\gamma - 1)^{-1}$ zusammenhängt. Die Randbedingungen sind $\Theta(0) = 1$ und $\Theta'(0) = 0$.

Nehmen Sie an, dass Θ um den Punkt $\xi = 0$ eine Taylorentwicklung besitzt und zeigen Sie dann, dass

$$\Theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\,\xi^2 + \frac{n}{120}\,\xi^4 + O(\xi^6)\,. \tag{3}$$

Können ungerade Potenzen in der Taylorentwicklung auftreten?

Verifizieren Sie außerdem, dass die folgenden Funktionen

$$\Theta(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{6}\xi^2 & \text{für } n = 0 \\ \sin(\xi)/\xi & \text{für } n = 1 \\ \left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{-1/2} & \text{für } n = 5 \end{cases} \tag{4}$$

die Lane-Emden-Gleichung zu den entsprechenden Polytropenindizes *exakt* lösen. Wecher dieser Fälle entspricht einem vernünftigen Sternmodell?

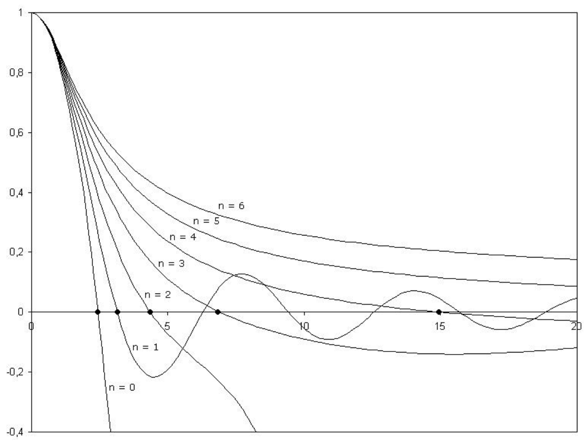

Abbildung 1: Lösungen der Lane-Emden-Gleichung für verschiedene Polytropenindizes.

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurden mit Hilfe der Lane-Emden-Gleichung Ausdrücke für die Masse und den Radius eines (polytropen) Sterns als Funktion der Massendichte am Ursprung $\rho(0)$ abgeleitet. Berechnen Sie daraus das Verhältnis der mittleren zur zentralen Massendichte,

$$\frac{\langle\rho\rangle_V}{\rho(0)} := \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} \cdot \frac{1}{\rho(0)}\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der genannten Ausdrücke für Masse und Radius, dass dieses Verhältnis bereits durch Angabe des Polytropenindex' festgelegt wird und berechnen Sie dieses für $\gamma = 5/3$ und $\gamma = 4/3$. Hinweis: Für diese Indizes haben die Lane-Emden-Funktionen die folgenden Nullstellen: $\xi_1^{(\gamma=5/3)} = 3{,}65375$ und $\xi_1^{(\gamma=4/3)} = 6{,}89685$ mit dazugehörigen Ableitungen $\Theta'\left(\xi_1^{\gamma=5/3}\right) = -0{,}20330$ und $\Theta'\left(\xi_1^{\gamma=4/3}\right) = -0{,}04243$.

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe gilt die Notation der Allgemeinen Relativitätstheorie: g *ist eine Lorentz'sche Metrik der Signatur* $(+,-,-,-)$ *und* ∇ *bezeichnet die Levi-Civita (torsionsfrei und metrisch) kovariante Ableitung bezüglich* g.

Sei u das Vierergeschwindigkeitsfeld einer idealen Flüssigkeit mit Massendichte (gemessen im lokalen Ruhsystem) ρ und Druck p auf einer Raumzeit (M, g). Es gilt $g(u, u) = c^2$. Ferner bezeichnen wir im folgenden die kovariante Ableitungen in Richtung von u mit einem Punkt.

Teil1

Der Energie-Impuls-Tensor der Flüssigkeit ist gegeben durch

$$T^{ab} = \rho\, u^a u^b + p\big(c^{-2} u^a u^b - g^{ab}\big)\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass $\nabla_a T^{ab} = 0$ äquivalent ist zu

$$\nabla_a\big(\rho u^a\big) + c^{-2} p \nabla_a u^a \qquad\qquad = 0\,, \tag{7a}$$

$$(\rho + c^{-2} p)\dot{u}^a + c^{-2}\dot{p}\, u^a - \nabla^a p = 0\,. \tag{7b}$$

Teil 2

Nehmen Sie an, dass es neben den in Teil 1 genannten Zustandsgrößen ρ und p der Flüssigkeit noch eine weitere Größe gibt, deren Dichte (gemessen im lokalen Ruhsystem) mit n bezeichnet werde und die im Unterschied zur Masse (vgl. (7a)) erhalten ist:

$$\nabla_a(n u^a) = 0\,. \tag{8}$$

Wir nennen die erhaltene Größe kurz die „Teilchenzahl". Konkret denke man z.B. an die Baryonenzahl. Wir beschreiben das System nun thermodynamisch und beziehen die Zustandsgrößen wie Energie, Entropie und Volumen statt auf die Masseneinheit (wie in der nicht-relativistischen Thermodynamik üblich) auf die Teilchen. Die *innere Energie pro Teilchen* ist dann

$$\varepsilon := \rho c^2 / n\,. \tag{9}$$

Das *Volumen pro Teilchen* ist $1/n$, so dass der erste Hauptsatz der Thermodynamik nun die Form annimmt

$$d\varepsilon = T\, ds - p\, d(1/n)\,. \tag{10}$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der Bedingung (7a) mit der Aussage, dass die Entropie pro Teilchen entlang der Flüssigkeitsströmung konstant ist.

Teil 3

Nehmen Sie nun weitergehend an, die Entropie pro Teilchen sei nicht nur entlang jeder Integralkurve von u konstant, sondern nehme auch auf allen Integralkurven den gleichen Wert an, d.h. die Entropie sei „über dem Körper" konstant. Ferner sei ρ eine (noch unbekannte) Funktion von n. Zeigen Sie dann mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik (10), dass der Druck gegeben ist durch

$$p = c^2 \left(n \frac{d\rho}{dn} - \rho \right)\,. \tag{11}$$

Ist also p als Funktion von ρ gegeben, so können Sie daraus n als Funktion von ρ und umgekehrt ρ als Funktion von n bestimmen. Führen Sie dies explizit durch für Zustandsgleichungen der Form $p = K\rho^{\gamma}$. Wie verhält sich n für $\rho \to 0$? Interpretieren Sie den Quotienten ρ/n im Limes $n \to 0$.