Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurden für Lane-Emden-Sterne (d.h. innerhalb der Newton'schen Gravitationstheorie) Ausdrücken für den Radius und die Masse als Funktionen der zentralen Dichte ρ_0 abgeleitet, wobei vorausgesetzt wurde, dass der Stern durch den Fermidruck der Elektronen bei Temperatur $T = 0$ stabilisiert wird. Zeigen Sie, dass für $\gamma = 5/3$ und $\gamma = 4/3$ diese Ausdrücke in folgende Form gebracht werden können:

$$R = \begin{cases} \left(\frac{3\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma} \frac{\bar{\lambda}_e \bar{\lambda}_n}{\ell_P} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/6} \xi_1^{(\gamma=5/3)} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma} \frac{\bar{\lambda}_e \bar{\lambda}_n}{\ell_P} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/3} \xi_1^{(\gamma=4/3)} & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{1a}$$

$$M = \begin{cases} \left(\frac{3\pi}{32}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{m_P^3}{m_n^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{1/2} \left[\xi_1^2 |\Theta'(\xi_1)|\right]^{(\gamma=5/3)} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{m_P^3}{m_n^2} \left[\xi_1^2 |\Theta'(\xi_1)|\right]^{(\gamma=4/3)} & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{1b}$$

Dabei bezeichnet wie in der Vorlesung σ die Anzahl der Baryonen pro Elektron und ρ_c die kritische Massendichte

$$\rho_c := \frac{\sigma m_n}{3\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3 \approx \sigma \cdot 9,84 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \,. \tag{2}$$

$m_P := \sqrt{\hbar c/G}$ ist die Planck-Masse, $\ell_P := \sqrt{\hbar G/c^3}$ die Planck-Länge und $\bar{\lambda}_e := \hbar/(m_e c)$ bzw. $\bar{\lambda}_n := \hbar/(m_n c)$ sind die reduzierten Compton-Wellenlängen für das Elektron und das Nukleon.

Rechnen Sie nach, dass ($M_\odot$ bezeichnet die Masse der Sonne):

$$R = \begin{cases} \frac{1,99}{\sigma} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/6} \cdot 10^4 \text{ km} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ \frac{5,31}{\sigma} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/3} \cdot 10^4 \text{ km} & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{3a}$$

$$M = \begin{cases} \frac{2,73}{\sigma^2} M_\odot \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{1/2} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ \frac{5,73}{\sigma^2} M_\odot & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{3b}$$

Argumentieren Sie nun, dass falls der Stern durch den Fermidruck der Nukleonen stabilisiert würde, die Ausdrücke für die Radien mit $\sigma m_e/m_n \approx \sigma/1836$ und die Ausdrücke für die Massen mit σ^2 multipliziert werden müssen und ρ_c statt durch (2) gegeben zu sein nun durch den Ausdruck

$$\tilde{\rho}_c := \frac{m_n}{3\pi^2}\left(\frac{m_n c}{\hbar}\right)^3 = 6,1 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3} \tag{4}$$

ersetzt werden muss. Für Neutronensterne sollte also gelten:

$$R = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{\rho}_c}{\rho_0}\right)^{1/6} 10,8\,\mathrm{km} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ \left(\frac{\tilde{\rho}_c}{\rho_0}\right)^{1/3} 28,9\,\mathrm{km} & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{5a}$$

$$M = \begin{cases} \left(\frac{\rho_0}{\tilde{\rho}_c}\right)^{1/2} 2,73\,M_\odot & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \\ 5,73\,M_\odot & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases} \tag{5b}$$

Welchen dieser Werte trauen Sie *nicht*? Begründen Sie dies. Wenn die zentrale Dichte ρ_0 das Drei- bis Vierfache der Dichte von Atomkernen ($2 \cdot 10^{17}$ kg $\cdot$ m^{-3}) betrüge, wie groß wären dann die Radien und die Massen der Neutronensterne? Achtung: Welcher Wert von γ ist dann relevant? Ist den entsprechenden Formeln aus (5) dann zu trauen?

Aufgabe 2

Der Kompaktheitsparameter eines Sterns ist durch die dimensionslose Zahl GM/c^2R gegeben, wobei M und R wieder die Masse und der Radius des Sterns angeben. Berechnen Sie den Kompaktheitsparameter eines kritischen weissen Zwerges (also für $\gamma = 4/3$) als Funktion des Verhältnisses ρ_0/ρ_c und argumentieren Sie damit, dass die Newton'sche Gravitationstheorie auch dann noch verwendet werden kann, wenn die zentrale Dichte ρ_0 deutlich größer als die kritische Dichte ρ_c wird. Bis zu welchem Verhältnis ρ_0/ρ_c würden Sie der Newton'schen Theorie denn noch trauen?