Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1

Stellen Sie sich einen Beobachter vor, der in der äußeren Schwarzschildmertik im festen Abstand $r = R_1 > r_s$ relativ zum gravitierenden Objekt ruht. An einem langen Seil (dessen Eigengewicht zu vernachlässigen ist) lässt er einen Gegenstand der Ruhmasse M bis zu einem Radius $r = R_2$ herab, wobei $R_1 > R_2 \geq r_s$.

Mit welcher Kraft muss der Beobachter bei $r = R_1$ am Seil ziehen, wenn er den Gegenstand bei $r = R_2$ ruhend halten will?

Was passiert mit dem Gegenstand und dem Beobachter, wenn der Beobachter den Gegenstand langsam bis auf $r = r_S$ und etwas darüber hinaus herablässt? Kann er das Seil dann wieder hinaufziehen? Wenn ja, was hängt dann noch daran?

Aufgabe 2

Wir betrachten 2-dimensionale Metriken der Form

$$g = f^2(r)\, dr^2 + g^2(r)\, d\phi^2\,. \tag{1}$$

Dabei sind r und φ ebene Polarkoordinaten in der punktierten Ebene $\Sigma := \mathbb{R}^2 - \{0\}$ und f, g positive, reellwertige Funktionen. Die Metrik (1) ist offensichtlich invariant unter Drehungen $(r, \varphi) \mapsto (r, \varphi + \alpha)$.

Wir wollen uns (Σ, g) durch eine isometrische Einbettung in den $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen. Dazu wählen wir zylindische Polarkoordinaten (z, ρ, φ) in $\mathbb{R}^3$ und suchen eine Einbettung der Form

$$(r, \phi) \mapsto \big(z(r)\,,\, \rho(r), \varphi = \phi\big)\,, \tag{2}$$

so dass

$$\begin{aligned} g &= \big[dz(r)\big]^2 + \big[d\rho(r)\big]^2 + \rho^2(r)\, d\varphi^2 \\ &= \big[z'^2(r)^2 + \rho'^2(r)\big]\, dr^2 + \rho^2(r)\, d\phi^2\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Vergleich mit (1) liefert dann als Bedingung der Isometrie:

$$\rho(r) \;=\; g(r)\,, \tag{4a}$$

$$z'(r) \;=\; \sqrt{f^2(r) - g'^2(r)}\,. \tag{4b}$$

Konstruieren und vergleichen Sie die Einbettungsdiagramme für die zwei Fälle

1) $f(r) = 1/\sqrt{1 - (r_s/r)}$ und $g(r) = r$ (räumliche Schwarschildmetrik, wurde bereits in der Vorlesung besprochen),

2) $f(r) = 1/[1 - (r_s/r)]$ und $g(r) = r/\sqrt{1 - (r_s/r)}$ (optische Schwarschildmetrik).

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass man jede sphärisch-symmetrische räumliche Metrik

$$g_R = f^2(r)\,dr^2 + g^2(r)\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\big) \tag{5}$$

durch Verwendung einer neuen Radialkoordinate $r_* = h(r)$ in manifest räumlich konform-flacher Gestalt schreiben kann:

$$g_R = F^2(r_*)\Big[dr_*^2 + r_*^2\big(\,d\theta^2 + r_*^2\,\sin^2\theta\,d\varphi^2\big)\Big]\,. \tag{6}$$

Führen Sie dies für die äußere Schwarzschildmetrik explizit durch und zeigen Sie damit, dass diese in der Form

$$g = \left[\frac{1-\frac{r_S}{4r_*}}{1+\frac{r_S}{4r_*}}\right]^2 c^2\,dt^2 - \left[1+\frac{r_S}{4r_*}\right]^4 \big(dr_*^2 + r_*^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\big) \tag{7}$$

geschrieben werden kann. Diskutieren Sie die Abbildung $r_* \to r$ für $r_* \in (0,\infty)$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Abbildungen (Inversion an der Sphäre $r_* = r_S/4$)

$$I_1 : \big(t, r_*, \theta, \varphi\big) \mapsto \left(t\,,\ \frac{(r_S/4)^2}{r_*}\,,\ \theta, \varphi\right) \tag{8a}$$

$$I_2 : \big(t, r_*, \theta, \varphi\big) \mapsto \left(t\,,\ \frac{(r_S/4)^2}{r_*}\,,\ \pi-\theta, \varphi+\pi\right) \tag{8b}$$

Isometrien der Schwarzschildmetrik (7) sind. Machen Sie sich die Geometrie der Hyperfläche t = konst. qualitativ anhand eines Einbettungsdiagramms klar, wobei es reicht, die Flächeninhalte der 2-Sphren $r_* = \mathrm{konst.}$ als Funktion von r_* zu betrachten. Benutzen Sie die erste Isometrie (8a) um von den geometrischen Verhältnissen für $r_* > r_s/4$ auf die für $r_* < r_s/4$ zu schließen. Welche geometrischen Aussagen können Sie über die 2-Sphäre $r_* = r_S/4$ treffen, wenn Sie in Betracht ziehen, dass diese aus Fixpunkten der Isometrie I_1 besteht?

Für Differentialgeometrie Interessierte: Zeigen Sie, dass die in (8b) definierte Isometrie I_2 im Gegensatz zu I_1 fixpunktfrei operiert, und zwar zunächst auf den raumartigen Flächen Σ_t konstanter Zeit t und damit auch in der ganzen Raumzeit $M = \Sigma \times \mathbb{R}$. Also ist es möglich zum Quotientenraum $M' := M/\!\sim$ der durch I_2 definierten Äquivalenzrelation überzugehen, der topologisch wieder die Produktstruktur $\Sigma' \times \mathbb{R}$ hat und der, da I_2 eine Isometrie ist, eine glatte Lorentzmetrik bekommt wobei Σ' raumartig ist. Beschreiben Sie die Topologie, Metrik und asymptotische Struktur von Σ'. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede bestehen zwischen Σ und Σ' und was könnte M' beschreiben.

Aufgabe 5 (Für Differentialgeometrie-Erfahrene)

Wir betrachten eine allgemeine statische Raumzeit, deren Metrik lokal immer auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$g = \Phi^2(\vec{x})\, c^2\, dt \otimes dt - h_{ab}(\vec{x})\, dx^a \otimes dx^b\,, \tag{9}$$

wobei die Funktionen Φ und h_{ab} nicht von t abhängen. Führen Sie eine orthonormale Basis $\{\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ von Kovektorfeldern ein, so dass

$$\theta^0 = \Phi\, c dt \quad \text{und} \quad h_{ab}\, dx^a \otimes dx^b = \sum_{a=1}^{3} \theta^a \otimes \theta^a\,. \tag{10}$$

Zeigen Sie (z.B. mit Hilfe der Cartanschen Strukturgleichungen), dass der Ricci-Tensor der Metrik g gegeben ist durch

$$R_{00} = \frac{\Delta^{(h)}\Phi}{\Phi}\,, \quad R_{0a} = 0\,, \quad R_{ab} = R^{(h)}_{ab} - \frac{\nabla^{(h)}_a \nabla^{(h)}_b \Phi}{\Phi}\,. \tag{11}$$

Dabei beziehen sich alle Komponenten auf die orthonormale Kobasis der θ^a, $\nabla^{(h)}_a$ sind die kovarianten Ableitungen in den 3-dimensionalen Flächen $t =$ konst. mit Metrik h, $R^{(h)}_{ab}$ ist ihr Ricci-Tensor und $\Delta^{(h)} := h^{ab}\nabla^{(h)}_a \nabla^{(h)}_b$ ihr Laplace Operator.

Untersuchen Sie mit Hilfe von (11) die überall regulären, statischen Lösungen der Vakuum (d.h. $T_{ab} = 0$) Einsteingleichungen. Zeigen Sie damit den Satz von Einstein-Pauli (1943), dass, falls die Hyperflächen $t =$ konst. keinen inneren Rand besitzen, die einzige solche Lösung, die räumlich-asymptotisch flach und überall regulär ist, durch den Minkowskiraum gegeben ist. (Achtung: In 3 Dimensionen impliziert ein verschwindender Ricci-Tensor das Verschwinden des ganzen Riemann'schen Krümmungstensors.) Was bedeutet das physikalisch?

Aufgabe 6

In der Vorlesung wurde die TOV-Gleichung (Tolman-Oppenheimer-Volkoff) für verschwindende kosmologische Konstante Λ abgeleitet. Zeigen Sie, dass im Falle $\Lambda \neq 0$ die entsprechende Gleichung für den Druckgradienten wie folgt lautet:

$$-p'(r) = G \cdot \frac{M(r) + 4\pi r^3 p(r)/c^2 - \frac{c^2}{3G}\Lambda r^3}{r^2\left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right]}\,. \tag{12}$$

Gehen Sie dazu von folgender Beobachtung aus: Die Einstein-Gleichung mit kosmologischer Konstante

$$G_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu} = \kappa\, T_{\mu\nu} \tag{13}$$

kann in der Form

$$G_{\mu\nu} = \kappa\, \tilde{T}_{\mu\nu} \tag{14}$$

mit

$$\tilde{T}_{\mu\nu} := T_{\mu\nu} + \kappa^{-1}\Lambda g_{\mu\nu} \tag{15}$$

geschrieben werden. Sei nun T der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u_\mu u_\nu - p\, g_{\mu\nu}\,, \tag{16}$$

wobei ρ die Massendichte, p der Druck und u das Vierer-Geschwindigkeitsfeld der Strömung ist. Dann ist

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = (\tilde{\rho} + \tilde{p}/c^2)u_\mu u_\nu - \tilde{p}\, g_{\mu\nu} \tag{17}$$

mit

$$\tilde{\rho} := \rho + \Lambda/(\kappa c^2)\,, \tag{18a}$$

$$\tilde{p} := p - \Lambda/\kappa\,. \tag{18b}$$

Argumentieren Sie nun, dass man um (12) zu erhalten in der TOV-Gleichung für $\Lambda = 0$ nur die Ersetzung (18) vornehmen muss, wobei die Funktion $M(r)$ entsprechend ihrer Definition ebenfalls ersetzt wird.

Spezialisieren Sie nun auf den für $\Lambda = 0$ bereits in der Vorlesung explizit behandelten Fall inkompressibler Materie

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 > 0 & \text{für} \quad r \leq R \\ 0 & \text{für} \quad r > R \end{cases} \tag{19}$$

und integrieren Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung die Gleichung (12). (Achtung: Der Radius des Sterns ist nach wie vor durch $p(R) = 0$ charakterisiert, also durch $\tilde{p}(R) = -\Lambda/\kappa$.) Für welche Sternradien R ist bei gegebenem ρ_0 der Druck im Zentrum endlich?