Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde die innere Schwarzschildlösung besprochen und aus der Bedingung, dass der Druck in Inneren nicht divergieren möge, die Buchdahl-Grenze $R > \frac{9}{8} r_s$ abgeleitet. Man kann aber auch argumentieren, dass der Druck nicht einmal den Wert $\rho_0 c^2$ übersteigen darf, weil sonst die sogenannte Energiedominanzbedingung verletzt würde (ρ_0 ist die konstante Massendichte). Welche untere Grenze erhalten Sie damit für den Radius des (sphärisch-Symmetrischen, homogenen) Sterns und welche obere Schranke an die Rotverschiebung von Licht, das von der Sternoverfläche ins räumlich unendliche gelangt?

Aufgabe 2

In der äußeren Schwarzschildgeometrie ruhe ein Beobachter relativ zu den Schwarzschildkoordinaten bei $r = R > r_S$. Diejenigen Nullgeodätischen seines Rückwärtslichtkegels, die bei Rückverfolgung ein Gebiet beschränkter r-Werte nicht verlassen, nennt man den „Schatten" des Zentralobjektes. Begründen Sie diese Terminologie. Zeigen Sie, dass der Schatten im vorliegenden Fall ein Kreiskegel mit Öffnungswinkel α (Winkel zwischen Symmetrieachse und Kegelmantel) füllt, wobei

$$\sin\alpha = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{r_S}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} \,. \tag{1}$$

Anleitung: Benutzen Sie die in der Vorlesung besprochene Methode des effektiven Potentials für die Radialbewegung und machen Sie Sich klar, dass die Schatten-Geodätischen genau diejenigen sind, die bei Rückverfolgung über das Potentialmaximum bei $r = 3r_S/2$ kommen.