Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Aufgabe 1

In dieser und der nächsten Aufgabe geht es nochmals um die äußere Schwarzschild-Metrik

$$g = \left(1 - r_s/r\right) c^2 dt^2 - \left(1 - r_s/r\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{1}$$

wobei auch die Region $r < r_s$ eingeschlossen wird.

In der Vorlesung wurden die Eddington-Finkelstein Koordinaten (u, v) als Funktion der Schwarzschild-Koordinaten (t, r) wie folgt definiert:

$$u(ct, r) := ct - r_*(r), \tag{2a}$$

$$v(ct, r) := ct + r_*(r), \tag{2b}$$

mit

$$r_*(r) := r + r_s \cdot \ln\left(\left|\frac{r}{r_s} - 1\right|\right). \tag{2c}$$

Beachten Sie, dass diese Transformationsformeln sowohl für $r > r_s$ als auch $r < r_s$ sinnvoll sind.

Zeigen Sie, dass diese für $r > r_s$ folgende Interpretation besitzen: Die Kurve $u = k = konst.$ ist ein radialer, nach äußen gerichter Lichtstrahl, der bei $r = -r_*^{-1}(K)$ die $(t = 0)$—Hyperfläche schneidet. Die Kurve $v = k = konst.$ ist ein radialer, nach innen gerichteter Lichtstrahl, der bei $r = r_*^{-1}(K)$ die $(t = 0)$—Hyperfläche schneidet.

Wie lautet die analoge Interpretation im Gebiet $r < r_s$?

Zeichnen Sie die Kurven $u = 0$ und $v = 0$ in der (ct, r)-Halbebene $r > 0$.

Aufgabe 2

Wir betrachten wieder die außere Schwarzschild-Metrik (1). Statt einer neuen radialen Koordinate r_* wie oben führen wir eine neue Zeitkoordinate $T(t, r)$ wie folgt ein:

$$cT(t, r) := ct + f(r). \tag{3}$$

Hierbei sei die Funktion f durch die Forderung bestimmt, dass die Flächen $T = konst$ eine flache induzierte Metrik tragen.

Zeigen Sie, dass diese Forderung erfüllt wird, wenn f der Differentialgleichung genügt

$$f'(r) = \frac{\sqrt{r/r_s}}{(r/r_s) - 1}, \tag{4}$$

die für $r > r_s$ gelöst wird durch

$$f(r) = r_s \cdot \left\{ 2\sqrt{r/r_s} + \ln\left(\frac{\sqrt{r/r_s} - 1}{\sqrt{r/r_s} + 1} \right) \right\} . \tag{5}$$

Die Metrik (1) nimmt dann die Form an

$$g = \bigl(1 - r_s/r\bigr)\, c^2 dT^2 - 2\sqrt{r_s/r}\, c\, dT\, dr - \bigl(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\bigr) , \tag{6}$$

die bei $r = r_s$ regulär ist; warum?

Zeichnen Sie die Kurve $T = 0$ in der (ct, r)—Halbebene $r > r_s$.

Man nennt die Koordiaten (T, r, θ, φ) die *Painlevée-Gulstrand* – Koordinaten und insbesondere T die *Painlevée-Gulstrand* – Zeit.

Betrachten Sie in der Metrik (1) radiale einfallende Geodätische, deren Anfangsbedingungen so seien, dass $\dot{r} \to 0$ für $r \to \infty$. Zeigen Sie, dass deren Vierergeschwindigkeitsfeld gegeben ist durch

$$u = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{\partial}{\partial t} - c\sqrt{\frac{r_s}{r}}\, \frac{\partial}{\partial r} , \tag{7a}$$

und dass dieses in (T, r)-Koordinaten folgende Form annimmt

$$u = \frac{\partial}{\partial T} - c\sqrt{\frac{r_s}{r}} \frac{\partial}{\partial r} . \tag{7b}$$

Bilden Sie das zu u gehörige Feld von 1-Formen $u^\flat := g(u, \cdot)$ und zeigen Sie, dass dieses in Schwarzschild-Koordinaten folgende Form annimmt,

$$u^\flat = c^2\, dt + c \cdot \frac{\sqrt{r_s/r}}{(r_s/r) - 1}\, dr , \tag{8a}$$

dass also gilt,

$$u^\flat = c^2\, dT . \tag{8b}$$

Begründen Sie mit Hilfe von (8b) und (7b) folgende zwei Aussagen: 1) Das geodätische Vektorfeld u steht überall senkrecht auf den Hyperflächen konstanter Painlevée-Gullstand-Zeit T. 2) Die Eigenzeit τ, die entlang einer Integralkurve von u zwischen ihren Schnittpunkten mit den Flächen $T = T_1$ und $T = T_2 > T_1$ vergeht ist gerade $\tau = (T_2 - T_1)$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie im 2-dimensionalen Minkowski-Raum mit Standardkoordinaten (t, x) die Region $x > |ct|$. Diesem Bereich parametrisieren wir durch „hyperbolische Polarkordinaten“ (λ, ξ), wobei $\xi > 0$. Diese sind definiert durch

$$\begin{aligned} ct(\lambda, \xi) &= \xi \cdot \sinh(\lambda) , \\ x(\lambda, \xi) &= \xi \cdot \cosh(\lambda) . \end{aligned} \tag{8c}$$

Zeigen Sie, dass in diesen die Minkowski-Metrik folgende Form annimmt:

$$\eta := c^2 dt^2 - dx^2 = \xi^2 \, d\lambda^2 - d\xi^2 \,. \tag{8d}$$

Zeigen Sie, dass für festes ξ die Kurve $\lambda \mapsto \big(ct(\lambda,\xi)\,,\, x(\xi,\lambda)\big)$ eine Integralkurve des Killing-Vektorfeldes $K = c\partial_{ct} + ct\partial_x$ ist, das Geschwindigkeitstransformationen („Boosts") in x-Richtung erzeugt, wobei die Anfangsbedingungen zu $ct(\lambda = 0, \xi) = 0$ gewählt wurden. Man nennt λ auch die „Rapidität" des erzeugten Boosts (diese ist definiert durch die „Additivität" des Parameters).

Zeigen Sie, dass die „Killing-Zeit" λ mit der Eigenzeit τ entlang der Kurve wie folgt zusammenhängt,

$$\tau = \frac{\xi}{c} \cdot \lambda \,, \tag{8e}$$

wenn $\tau = 0$ für $\lambda = 0$ gewählt wird.

Zeigen Sie weiter, dass der Betrag a der Viererbeschleunigung entlang der Kurve gegeben ist durch

$$a = \frac{c^2}{\xi} \,. \tag{8f}$$

Denkt man sich also jeden Punkt im Intevall $[\xi_1, \xi_2]$ der x-Achse ($t = 0$) um die gleiche Parameterstrecke λ entlang des Flusses von K transportiert, so hängt sowohl die Beschleunigung $a = c^2/\xi$ als auch die Eigenzeit $\tau = \xi/c$ von Punkt ξ ab, aber nicht das Produkt $a \cdot \tau = c\lambda$! Was bedeutet das hinsichtlich der Frage, wie man einen Gegenstand, z.B. einen in x-Richtung ausgerichteten Stab, starr, also ohne Deformation, in translatorische Bewegung versetzt?

Zeigen Sie, dass für festes λ die Kurven $\xi \mapsto (ct(\lambda, \xi, x(\xi, \lambda), \; \xi \geq 0$, Halbgeraden sind, die die Integralkurven von K senkrecht schneiden. (Machen Sie eine Skizze der Linien konstanter λ und ξ.) Nach der in der SRT üblichen Sprechweise bestehen sie also jeweils aus den Mengen paarweise gleichzeitiger Ereignisse für die entlang K bewegten Beobachter. Andererseits schneiden sich alle diese Halbgeraden im Ursprung, so dass dieser ein Ereignis darzustellen scheint, das (der Sprechweise folgend) gleichzeitig mit allen anderen im betrachteten Gebiet $x > |ct|$ ist. Ist das schlimm?

Man könnte in (8c) auch λ gemäß (8e) durch τ ersetzen und die Region $x > |ct|$ durch (τ, ξ) statt (λ, ξ) parametrisieren. Wie sähen dann die Kurven konstanter Eigenzeit τ aus. Warum sind diese so anders als die Kurven konstanter Killing-Zeit λ?

Betrachten Sie zuletzt die zeitartige Weltlinie eines „Beobachters" zu festem ξ. Charakterisieren Sie durch Angabe der Wertebereiche der Koordinaten alle Punkte der tx - Ebene, die vom Beobachter kausal beeinflusst werden können, sowie alle Punkte, die ihrerseits den Beobachter kausal beeinflussen werden können. Was entspricht dem Schnitt der Komplemente beider Mengen? Wie verändern sich diese Mengen, wenn die Bahnkurve des Beobachters für sehr große bzw. kleine λ - Werte in eine unbeschleunigte Kurve übergeht?