Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 7

Aufgabe 1

Im Folgenden sei (V, η) 4-dimensionaler, reeller Vektorraum mit Metrik der Signatur $(+,-,-,-)$, und $\star : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{4-p} V$ die Hodge-Abbildung (je eine Abbildung für $p = 0,1,2,3,4$), die im Falle $p = 2$ die Form $(\star F)_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$ annimmt. Wir interessieren uns für die Menge der bezüglich η antisymmetrischen Endomorphismen

$$\widehat{\mathrm{End}}(V) = \left\{F \in V \otimes V^* : \eta(Fv, w) = -\eta(v, Fw)\,; \forall v, w \in V\right\}. \tag{1}$$

Wie üblich können wir diese mit Hilfe von η mit $V \wedge V$ identifizieren. Somit können wir $\star$ auf Elemente in $\widehat{\mathrm{End}}(V)$ anwenden.

Beweisen Sie, dass für je zwei Elemente $F, G \in \widehat{\mathrm{End}}(V)$ folgende Identität gilt:

$$F \circ G - (\star G) \circ (\star F) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Spur}(F \circ G)\,\mathrm{id}_V\,. \tag{2}$$

Tipp: Schreiben Sie $(\star G) \circ (\star F)$ in Komponenten und werten sie erneut Produkt der ε-Tensoren wie üblich aus.

Leiten Sie durch Spezialisierung von (2) die weiteren Identitäten für $F \in \widehat{\mathrm{End}}(V)$ ab (wir lassen nun das Kompositionssymbol $\circ$ weg und schreiben $F^2 := F \circ F$ etc):

$$F^2 - (\star F)^2 = 2I_1\,\mathrm{id}_V\,, \tag{3a}$$
$$F\,(\star F) = I_2\,\mathrm{id}_V\,, \tag{3b}$$
$$F^4 - 2I_1\,F^2 - I_2^2\,\mathrm{id}_V = 0\,. \tag{3c}$$

Dabei haben wir folgende Abkürzungen benutzt:

$$I_1 := \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Spur}\big(F^2\big)\,, \qquad I_2 := \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Spur}\big(F\,(\star F)\big)\,. \tag{4}$$

Beweisen Sie damit, dass jedes Spurpolynom in den F und $(\star F)$ durch die beiden Invarianten I_1 und I_2 ausgedrückt werden kann.

Der spurfreie Anteil von F^2 ist

$$T := F^2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{Spur}(F^2)\mathrm{id}_V = F^2 - I_1\,\mathrm{id}_V \tag{5}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (3c), dass

$$T^2 = (I_1^2 + I_2^2)\,\mathrm{id}_V \tag{6}$$

und mit Hilfe von (2), dass

$$T = \tfrac{1}{2}\big(F^2 + (\star F)^2\big)\,. \tag{7}$$

Folgern Sie aus letzterer, dass T invariant unter sogenannten Dualitätstransformationen ist:

$$\begin{pmatrix} F \\ \star F \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F_\theta \\ \star F_\theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \star F \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Benutzen Sie diese Resultate um ein paar interessante Aussagen über den Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes zu treffen.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde die Reissner-Nordström-Metrik abgeleitet:

$$g \quad = \phi(r)\, c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\phi(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\,, \tag{9a}$$

$$\text{mit} \quad \phi(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\,. \tag{9b}$$

$$\tag{9c}$$

Die Parameter m und q, die beide die physikalische Dimension einer Länge besitzen, hängen mit der Masse $M \geq 0$ und Ladung Q wie folgt zusammen (wir benutzen das MKSA-System):

$$m = M \cdot \frac{G}{c^2}\,, \tag{9d}$$

$$q = |Q| \cdot \sqrt{\frac{G}{4\pi\varepsilon_0 c^4}} = |Q| \cdot \sqrt{\frac{G\mu_0}{4\pi c^2}}\,. \tag{9e}$$

Hier ist $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{A}^{-2}$ die magnetische Feldkonstante.

Bestimmen Sie das dimensionslose Verhältnis q/m für das Elektron.

Sei $m > q$; berechnen Sie in der raumartigen Hyperfläche $t = 0$ den radialen Abstand eines Punktes mit $r > r_+ := m + \sqrt{m^2 - q^2}$ zum äußeren Horizont $r = r_+$.

Zeigen Sie, dass lichtartige Geodätische in der RN-Metrik einer Gleichung der Form $\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = 0$ genügen und diskutieren Sie die Form von $V_{\text{eff}}(r)$. Diskutieren Sie insbesondere, bei welchen Radien räumliche Kreisbahnen (stabil oder instabil) in Abhängigkeit von $\sigma := q/m$ möglich sind.