Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 8

Aufgabe 1

Wie in Aufgabe 3 von Blatt 6 betrachten wir nochmals die im 2-dimensionalen Minkowski-Raum mit Standardkoordinaten (t, x) die Region $x > |ct|$ und darin die Schar (Scharparameter ξ) der Integralkurven (Kurvenparameter λ) des Boost-Killingfeldes. Diese ist

$$\begin{aligned} ct(\lambda, \xi) &= \xi \cdot \sinh(\lambda)\,, \\ x(\lambda, \xi) &= \xi \cdot \cosh(\lambda)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Berechnen Sie die Rotverschiebung, mit der ein monochromatisches Lichtsignal, das ein Beobacher B_1 mit Scharparameter ξ_1 sendet, von einem Beobachter B_2 mit Scharparameter $\xi_2 > \xi_1$ empfangen wird.

Angenommen das Lichtsignal werde vom Beobachter B_2 instantan zum Beobachter B_1 zurückreflektiert. Berechnen Sie die Eigenzeit $\tau(1,2)$, die der Beobachter B_1 zwischen den Ereignissen des Absendens und Zurückempfangens dieses Lichtsignals misst. Argumentieren Sie, dass diese Eigenzeit nicht davon abhängt, wann auf seiner Weltlinie der Beobachter B_1 das Signal sendet. Definieren Sie eine „Lichtdistanz“ $d(1,2)$ von B_2 *relativ zu* B_1 durch

$$d(1,2) := \tfrac{1}{2} c\tau(1,2)\,. \tag{2}$$

Vertauscht man die Rollen von B_1 und B_2, so erhält man eine „Lichtdistanz“ $d(2,1)$ von B_1 *relativ zu* B_2.

Zeigen Sie

$$d(1,2) \;=\; \xi_1 \cdot \ln\bigl(\xi_2/\xi_1\bigr)\,, \tag{3a}$$

$$d(2,1) \;=\; \xi_2 \cdot \ln\bigl(\xi_2/\xi_1\bigr)\,. \tag{3b}$$

Nun gilt f‘ur die gleichzeitige räumliche Distanz $s(1,2)$ von B_2 *relativ zu* B_1, sowie die gleichzeitige räumliche Distanz $s(2,1)$ von B_1 *relativ zu* B_2 (begründen Sie das)

$$s(1,2) = s(2,1) = \xi_2 - \xi_1\,. \tag{4}$$

Beweisen Sie nun die Ungleichungen

$$d(1,2) < s(1,2) < d(2,1)\,, \tag{5}$$

Zeigen Sie auch, dass für festes ξ_2 gilt

$$\lim_{\xi_1 \to 0} d(1,2) = 0\,, \quad \lim_{\xi_1 \to 0} d(2,1) = \infty\,. \tag{6}$$

Angenommen ein Raumschiff mit zwei Personen an Bord, Alice und Bob, bewege sich entlang der Weltlinie mit Scharparameter ξ. Alice hat genug von der Reise und verlässt bei $\lambda = 0$ das Raumschiff ohne abzuspringen (also mit verschwindender anfänglicher Relativgeschwindigkeit). Zu diesem Ereignis stellen Alice und Bob ihre Uhren auf $\tau_{\mathrm{Alice}} = \tau_{\mathrm{Bob}} = 0$.

Zeigen Sie, dass die Zeiten auf Alices Uhr, die Bob im gesamten weiteren Verlauf seiner Reise sehen kann, die Ungleichung $\tau_{\mathrm{Alice}} < \xi/c$ erfüllen. Außerdem schickt Bob Alice Nachrichten hinterher die sie ihm umgehend bestätigt. Zeigen Sie, dass obwohl Alice alle Nachrichten von Bob empfängt und auch bestätigt, Bob keine Bestätigungen für solche seiner Nachrichten bekommen kann, die er zu Zeiten $\tau_{\mathrm{Bob}} \geq (\xi/c)\ln(2)$ versandt hat.

Tipp: Betrachten Sie den 2d-Minkowski-Raum als 2-dimensionalen reellen Vektorraum mit Minkowski-Metrik, in dem Sie die ortnonormalen Basen $e_{ct} = \partial/\partial ct$ und $e_x = \partial/\partial x$ verwenden. Alternativ können Sie auch die orthonormalen Basen

$$e_\lambda(\lambda, \xi) := \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} = \cosh(\lambda)\, e_{ct} + \sinh(\lambda)\, e_x\,, \tag{7a}$$

$$e_\xi(\lambda, \xi) := \frac{\partial}{\partial \xi} = \sinh(\lambda)\, e_{ct} + \cosh(\lambda)\, e_x\,, \tag{7b}$$

einführen. Diese sind gerade so gewählt, dass $e_\lambda(\lambda, \xi)$ parallel zu den Weltlinien konstanter ξ und $e_\xi(\lambda, \xi)$ parallel zu den Halbgeraden konstanter λ sind. Nutzen Sie aus, dass Translationen $\lambda \mapsto \lambda + c$ Isometrien sind. Das erlaubt Ihnen o.B.d.A. z.B. die Refelxionsereignisse im ersten Teil der Aufgabe bei $\lambda = 0$ zu wählen. Dann liegen auch die Ereignisse des Absendens und Zurückempfangens symmetrisch zur x-Achse, also bei λ-Werten mit gleichem Betrag aber entgegengesetzen Vorzeichen.

Aufgabe 2

Seien M und J die Masse und der Drehimpuls eines Körpers. Wie für die Kerr-Metrik setze man $m := GM/c^2$ und $a := J/Mc$. Berechnen Sie das Verhältnis a/m für

1. das Elektron,
2. die Erde,
3. die Sonne,
4. die Milchstraße.

entweder mit exakt gemessenen oder „vernünftig“ geschätzten Werten für die entsprechenden Größen.

Aufgabe 3

Sei K ein Killingvektorfeld einer Metrik $g = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \otimes dx^\beta$ mit Ricci-Tensor $Ric = R_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \otimes dx^\beta$. Sei $K^\flat := g(K,\cdot) = K_\alpha dx^\alpha$ die zu K zugehörige 1-Form. Zeigen Sie folgende Identität:

$$d \star dK^\flat = -\star(2\, i_K Ric) = -2\, K^\alpha R_{\alpha\beta}\, \star dx^\alpha\,. \tag{8}$$

Tipp: Beweisen Sie die äquivalente Gleichung $\star d \star dK^\flat = 2\, i_K Ric$ indem Sie die Komponenten-Version der Hodge-Dualität mit Hilfe des ε-Tensors verwenden und die zwei ε in Produkte von δ verwandeln (vgl. Übung am 21.12.). Außerdem müssen Sie die Killing-Gleichung $\nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha = 0$ und $(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)K_\nu = -K_\mu R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ verwenden.

Zeigen Sie, dass für die äußere Schwarzschild-Metrik gilt (zur Erinnerung: $r_s = 2m = 2GM/c^2$)

$$m = \frac{-1}{8\pi} \cdot \int_{S^2(r)} \star dK^\flat\,, \tag{9a}$$

oder äquivalent

$$E = \frac{-1}{\kappa} \cdot \int_{S^2(r)} \star dK^\flat\,, \tag{9b}$$

mit $E = Mc^2$ und $\kappa = 8\pi G/c^4$. Hier ist $K = \partial/\partial ct$ und $S^2(r)$ eine Späre konstanten Oberflächenradius' r. Insbesondere ist das Integral von r unabhängig. Argumentieren Sie mit Hilfe von (8), dass diese Unabhängigkeit von r von vornherein klar war, und dass das Integral sogar den gleichen Wert für *alle* zu $S^2(r)$ homologen 2-Flächen (in der äußeren Schwarzschild Raumzeit) besitzt.

Wiederholen Sie diese Rechnung für die Reissner-Nordström Metrik. Wieso hängt das Integral über $S^2(r)$ nun von r ab? Interpretieren Sie mit Hilfe von (8) den zum Ladungsquadrat q^2 proportionalen Term als zweimal die Energie des elektrischen Feldes in der Raumregion außerhalb des Radius' r. Können Sie sich einen Reim auf den Faktor 2 machen?

Man nennt die Integrale (9) die *Komar-Masse/Energie* (nach Arthur Komar 1963).

Tipp: Um das Hodge-Duale von $dK^\flat$ zu berechnen kann man die 2-Form statt in $dx^\alpha \wedge dx^\beta$ in $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ entwickeln und einfach $\star(\theta^0 \wedge \theta^1) = \theta^2 \wedge \theta^3$ etc. benutzen. (Wie in der Vorlesung bezeichnen θ^α orthonormierte 1-Formen.)