Übungen zur Vorlesung

Theorie der schwarzen Löcher

von DOMENICO GIULINI

Blatt 9

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde für ein Kerr-Newman Schwarzes-Loch gezeigt, dass die Riemann'sche Metrik des Schnitts des Ereignishorizontes mit der Hyperfläche $t = 0$ gegeben ist durch

$$g_\Sigma = \rho^2\, d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(r_+^2 + a^2)^2\, d\varphi^2\,. \tag{1}$$

Dabei ist wie in der Vorlesung

$$\rho \;:=\; \sqrt{r_+^2 + a^2\,\cos^2\theta}\,, \tag{2a}$$

$$r_+ \;:=\; m + \sqrt{m^2 - a^2 - q^2}\,, \tag{2b}$$

und vorausgesetzt, dass

$$m^2 > a^2 + q^2\,. \tag{2c}$$

Zeigen Sie, dass die Gauß'sche Krümmung K (diese ist gleich dem halben Ricci-Skarlar R und gleich der Schnittkrümmung R_{1212}) gegeben ist durch

$$K = (r_+^2 + a^2)\cdot\frac{r_+^2 - 3a^2\,\cos^2\theta}{\left[r_+^2 + a^2\,\cos^2\theta\right]^3} \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass das Flächenintegral von K über Σ (bezüglich des durch die Metrik (1) induzierten Maßes) den von allen Parametern (m, a, q) *unabhängigen* Wert 4π hat. Wundert Sie das? Schließen Sie mit Hilfe des Theorems von Gauß & Bonnet, dass die Fläche Σ topologisch eine 2-Sphäre ist. (Das Theorem von Gauß & Bonnet besagt, dass das Integral des Gauß'schen Krümmung einer Riemann'schen Fläche Σ gleich ist $2\pi\chi(\Sigma)$, wobei $\chi(\Sigma) = 2\big(1 - g(\Sigma)\big)$ die Euler-Charakteristik von Σ ist, die mit deren Geschlecht $g(\Sigma)$ wie angegeben zusammenhängt.)

Die Gauß'sche Krümmung kann unter Umständen in Umgebungen der Pole $\theta = 0, \pi$ negativ werden. Zeigen Sie für den Fall verschwindender Ladung ($q = 0$), dass dies genau dann passiert, wenn

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot m < |a| < m\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass sich die Region negativer Krümmung maximal bis zum $54,73561...$ Breitengrad (nördlich und südlich) erstreckt, dass also ein symmetrischer Streifen um den Äquator von insgesamt über 70 Breitengraden immer positive Krümmung besitzt.

Argumentieren Sie, dass im Falle negativer Krümmung um die Pole die Fläche an den Polen nicht isometrisch in den dreidimensionalen Euklidischen Raum eingebettet werden kann, jedenfalls nicht in einer um die Rotationen um die Polachse symmetrischen

Weise. (Tipp: Die Metrik ist rotationsinvariant um eine Achse, so dass wir die Einbettung ebenfalls symmetrisch annehmen. Wie muss dann an den Polen der Meridian auf die Polachse treffen, damit die Krümmung der Rotationsfläche negativ ist?)