Theorie der Schwarzen Löcher

Hannover, WS 2011 - 2012

1. Vorlesung: Newtonische Theorie der Gravitation

~~Neu~~
Gravitation ist eine Kraft

$$\vec{F} = - m_g \vec{\nabla} \varphi \qquad (1.1)$$

φ = Gravitationspotential
m_g = Schwere Masse (passiv) des Testkörpers

Mit $\vec{F} = m_i \ddot{\vec{X}} \quad \curvearrowright \qquad (1.2)$

$$\ddot{\vec{X}}(t) = - \frac{m_g}{m_i} \vec{\nabla} \varphi(t, \vec{X}(t)) \qquad (1.3)$$

m_i = inertiale (= träge) Masse. Erfahrung:

$$\frac{m_g}{m_i} = \text{universelle Konstante}$$
$$= 1 \quad \text{(Einheitenwahl)}$$

$$\curvearrowright \quad \ddot{\vec{X}}(t) = - \vec{\nabla} \varphi(t, \vec{X}(t)) \qquad (1.4)$$

Bahn eines Testkörpers im Gravitationsfeld hängt nur vom Anfangszeitpunkt, Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit ab nicht jedoch von seinen weiteren physikalischen bzw. chemischen Eigenschaften

⇒ Das nennt man die „Universalität des freien Falls" oder das „schwache Äquivalenzprinzip".

Feldgleichung für $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\Delta \varphi = 4\pi G \varrho \qquad (1.5)$$

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

Zyl. Pol. Koord $\quad = \frac{1}{R} \partial_R (R \partial_R) + R^{-2} \partial_\varphi^2 + \partial_z^2$

Sph. Pol. Koord $\quad = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + R^{-2} \sin^{-1}\theta \, \partial_\theta (\sin\theta \, \partial_\theta) + R^{-2} \sin^{-2}\theta \, \partial_\varphi^2$

= Laplace Operator

$$G = 6{,}67384\,(80) \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg \cdot s} \qquad (1.6)$$

auf $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ genau bekannt

[vergleichsweise ungenau; z.B. Planck'sche Konstante, oder die Elementarladung um 4 Größenordnungen, also ≅ auf 10^{-8} genau bekannt.]

ρ = Dichte der aktiven Gravitationsmasse.

Ab jetzt setzen wir träge Masse = aktive / passive schwere Masse

Aus (1.5) folgt

$$\varphi(t,\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(t,\vec{x}')}{\|\vec{x}-\vec{x}'\|} d^3x' \qquad (1.7)$$

Beispiel: Sphärisch symmetrische Verteilung mit Radius R

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \rho(r) & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases} \qquad (1.8)$$

Wir wählen für die Integration das Koordinatensystem so, dass

$$\vec{x} = r\vec{e}_z$$

$$\curvearrowright \quad \|\vec{x}-\vec{x}'\| = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta\right)^{1/2}$$

mit $\vec{x}' = (r'\sin\theta\cos\varphi,\ r'\sin\theta\sin\varphi,\ r'\cos\theta)$

(1.9)

$$(*) = \int_0^R dr' \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad \frac{\varrho(r')\, r'^2 \sin\theta}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2}}$$

$$= 2\pi \int_0^R dr'\, \varrho(r')\, r'^2 \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(r^2 + r'^2 - 2rr'z)^{1/2}}$$

wobei $z = \cos\theta$

Es ist

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(r^2+r'^2-2rr'z)^{1/2}} = -\frac{1}{rr'}\left(r^2+r'^2-2rr'z\right)^{1/2}\Big|_{-1}^{+1}$$

$$= -\frac{1}{rr'}\left\{\left[(r-r')^2\right]^{1/2} - \left[(r+r')^2\right]^{1/2}\right\}$$

$$= \frac{1}{rr'}\left\{r + r' - |r - r'|\right\}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{r} & \text{für } r' < r \\ \frac{2}{r'} & \text{für } r' > r \end{cases} \qquad (1.9)$$

Also

$$(*) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r dr'\, \varrho(r')\, r'^2$$

$$+ 4\pi \int_r^R dr'\, \varrho(r')\, r'$$

$$= \frac{M(r)}{r} + 4\pi \int_r^R dr'\, r'\, \varrho(r')$$

und

$$\left.\begin{aligned} M(r) &= 4\pi \int_0^r dr' \, r'^2 \, \varrho(r') \\ \Rightarrow M'(r) &= 4\pi r^2 \varrho(r) \end{aligned}\right\} \quad (1.10)$$

Also

$$\varphi(r) = -G \frac{M(r)}{r} - G 4\pi \int_r^R dr' \, r' \varrho(r') \qquad (1.11)$$

Kraft auf Probemasse

$$\frac{1}{m} \vec{F} = -\vec{\nabla} \varphi = -\varphi'(r) \vec{e}_r$$

$$-\varphi'(r) = -G \frac{M(r)}{r^2} + \frac{M'(r)}{r} - 4\pi G \varrho(r) r$$

$$\overset{(1.10)}{=} -G \frac{M(r)}{r^2} \qquad (1.12)$$

Für eine unendlich dünne Kugelschale der Masse M, d.h.

$$\varrho(r) = \frac{M}{4\pi r^2} \delta(r-R)$$

ist

$$\varphi(r) = \begin{cases} -G \dfrac{M}{r} & \text{für } r \geq R \\[2ex] -G \dfrac{M}{R} & \text{für } r \leq R \end{cases} \qquad (1.13)$$

Außerhalb der Masse ist also

$$\varphi(r) = -G\frac{M}{r} \quad , \quad r > R$$

Für radialen Wurf nach „oben" gilt

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - G\frac{M}{r} = E/m = \text{konst}$$

Sei $\dot{r} = v_\infty$ bei $r = R$ und $\dot{r} = 0$ bei $r = \infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_\infty^2 - G\frac{M}{R} = E/m$$

$$0 - G\frac{M}{\infty} = E/m = 0$$

$$\Rightarrow v_\infty^2 = 2G\frac{M}{R} \qquad (1.14)$$

Fluchtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Masse des Probekörpers ($\Rightarrow$ Folge des schwachen Äquivalenzprinzips).

Frage: Unter welchen Bedingungen ist $v_\infty \geq c$ = Lichtgeschwindigkeit

Antwort: $v_\infty^2 > c^2 \Leftrightarrow$

$$2G\frac{M}{Rc^2} \geq 1 \qquad (1.15)$$

Dies kann man auf viele Weisen lesen

1.) $R \leq \frac{2GM}{c^2} =: R_S$ = „Schwarzschild-Radius"

$$R_S = 2 \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}}{(3 \cdot 10^8)^2} \frac{M}{M_\odot} \cdot 2 \cdot 10^{30} \ m$$

$$= 10^{30-11-16} \frac{4 \cdot 6{,}67}{9} \frac{M}{M_\odot} \ m$$

$$\cong \frac{M}{M_\odot} \ 3 \ Km$$

$$\cong \frac{M}{Kg} \ 1{,}5 \times 10^{-27} \ m \qquad (1.16)$$

Wird die Masse M auf einen Radius unterhalb $R = R_S := 2GM/c^2$ konzentriert, so ist die Fluchtgeschwindigkeit $V_\infty > c$.

Das Potential auf einem „Stern" vom Radius R_S ist

$$\varphi(r = R_S) = -G \frac{M}{R_S} = -\frac{c^2}{2}$$

Die Gravitationsfeldstärke ist

$$\varphi'(r = R_S) = G \frac{M}{r^2} = G \frac{M}{4G^2M^2} c^4$$

$$= \frac{c^4}{4GM} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{R_S} \qquad (1.17)$$

Diese kann beliebig klein werden wenn R_S, d.h. M, sehr groß wird.

Soll $\varphi' = 10 \frac{m}{s^2}$ = Erdbeschleunigung sein, so muss

$$R_S = \frac{1}{2} \frac{(3 \times 10^8)^2}{10} \; m$$

$$\cong 5 \cdot 10^{15} \; m \qquad (1.18)$$

oder

$$M = \frac{5 \cdot 10^{15} \; m}{1{,}5 \times 10^{-27} \; m} \; Kg$$

$$\cong 3 \cdot 10^{42} \; Kg \qquad (1.19)$$

Die durchschnittliche Dichte eines solchen Sterns wäre

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} \cong \frac{3}{4} \frac{10^{42} \; Kg}{125 \times 10^{45} \; m^3}$$

$$\cong \frac{3}{5} 10^{42-47} \frac{Kg}{m^3}$$

$$= \frac{3}{5} 10^{-2} \frac{g}{m^3} \qquad (1.20)$$

also sehr niedrig.

Mit $M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$ wird aus (1.15)

$$2G \frac{\frac{4\pi}{3} \rho R^3}{R c^2} = \frac{8\pi}{3} \frac{G}{c^2} \rho R^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad R \geq \frac{c}{\left(\frac{8\pi}{3} G \rho\right)^{1/2}}$$

Für $\rho = 1\, g/cm^3 = 10^3\, Kg/m^3$ ist

$$\frac{8\pi}{3} G \rho = \left(\frac{8\pi}{3}\, 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, 10^3\right)^{1/2} s^{-1}$$

$$\cong 7 \cdot 10^{-4}\, s^{-1}$$

$$\rightsquigarrow \quad R \geq \frac{3 \times 10^8}{7 \cdot 10^{-4}} \cong 5 \times 10^{11}\, m$$

$$= 5 \times 10^8\, Km$$

$$\rightsquigarrow \quad M \geq 10^3 \frac{Kg}{m^3} \frac{4\pi}{3}\, 125 \times 10^{33}\, m^3$$

$$= 5 \times 10^{38}\, Kg \cong 2 \times 10^8\, M_\odot$$

$$\rightsquigarrow \quad \varphi'(R_s) = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{5 \times 10^{38}}{25 \times 10^{22}} \frac{m}{s^2}$$

$$\cong 10^5 \frac{m}{s^2} = 10^4\, g$$

Die Beobachtung, dass in der Newton'schen Gravitationstheorie Sterne beschreibbar sind, von deren Oberfläche die Fluchtgeschwindigkeit V_∞ größer als c ist, wurde zuerst in einem Brief des Geologen John Michell (1724 - 1793) aus dem Jahre 1783 an Henry Cavendish gemacht

" If the semi-diameter of a sphere of the same density as the sun were to exceed that of the sun in the proportion 500 to 1, a body falling from an infinite height towards it would have acquired at its surface a greater velocity than that of light, and consequently supposing light to be attracted by the same force in proportion to its vis inertia, with other bodies, all light emitted from such a body would be made to return towards it by its own proper gravity".

John Michell 1783

Im Jahre 1796 hat Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749 - 1827) im Wesentlichen dieselbe Beobachtung gemacht.