Konforme Kompaktifizierung und Penrose-Diagramme

Idee: Repräsentiere Raum-Zeit als innere Punkte einer kompakten Mannigfaltigkeit mit Rand, deren Metrik konform äquivalent zur Metrik der Raum-Zeit ist.

Bemerkung: Durch konforme Änderungen der Metrik bleibt die Lichtkegel- und Kausalitätsstruktur erhalten.

Beispiel: Minkowski-Raum

$$g = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)}_{g_2 = S^2\text{-Metrik}}$$

1. Führe avancierte und retardierte Null-Koordinaten ein

$$v = ct + r \quad \in \,]-\infty, \infty[$$

$$u = ct - r \quad \in \,]-\infty, \infty[$$

mit $r \geq 0 \iff v - u \geq 0$

$$\Rightarrow g = dv \otimes du - \frac{(v-u)^2}{4} g_2$$

2. Ersetze u und v durch Karten mit beschränkten Bildern

$$v = R \tan\psi$$
$$u = R \tan\xi$$

$\psi, \xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\psi \geq \xi$
(da $v \geq u$ und tan streng monoton)
Hier ist R irgendeine Längenskala

$$\curvearrowright \quad dv \otimes du = R^2 \frac{d\psi \otimes d\xi}{\cos^2\psi \cos^2\xi}$$

$$v - u = R(\tan\psi - \tan\xi)$$
$$= R \frac{\sin(\psi - \xi)}{\cos\psi \cos\xi}$$

$$\Rightarrow g = \frac{R^2}{4} \frac{1}{\cos^2\psi \cos^2\xi} \Big[4\, d\psi \otimes d\xi - \sin^2(\psi - \xi)\, g_2 \Big]$$

3. Statt (ψ, ξ) führt man wieder (t, r) ähnliche Koordinaten ein

$$cT = R(\psi + \xi) \in (-R\pi, R\pi)$$

$$\rho = R(\psi - \xi) \in [0, R\pi)$$

$$\psi = \frac{1}{2R}(cT+\rho)$$

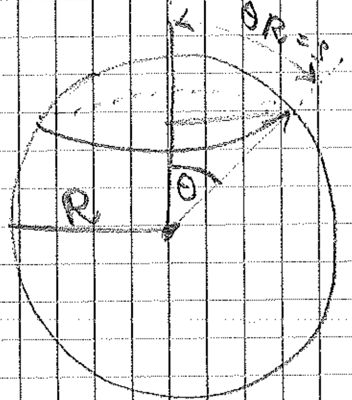
$$\xi = \frac{1}{2R}(cT-\rho)$$

$$\Rightarrow g = \Omega^{-2}(T,\rho)\,\Big[\underbrace{c^2 dT^2 - d\rho^2 - R^2 \sin^2\!\left(\tfrac{\rho}{R}\right) g_2}_{g_E}\Big]$$

mit

$$\Omega^{-2}(T,\rho) = (2\cos\psi\cos\xi)^{-2}$$

$$= \left[2\cos\left(\frac{cT+\rho}{2R}\right)\cos\left(\frac{cT-\rho}{2R}\right)\right]^{-2}$$



$\rho = \theta R$ ist die geodätische Distanz auf der 3-Sphäre mit Radius R entlang eines Meridians.

$$g_E = c^2 dT^2 - g_R^{(3)}$$

$$g_R^{(3)} = d\rho^2 + R^2 \sin^2\!\left(\frac{\rho}{R}\right) g_2$$

= Metrik des statischen Universums (Einstein) auf $\mathbb{R} \times S^3(R)$ auf dem durch (T,ρ) bzw (ψ,ξ) param. Stück.

Zusammenfassung

$$g_{Mink} = c^2\, dt^2 - dr^2 - r^2\, g^{(2)}$$

$g^{(2)}$ = Metrik der Einheitssphäre

$$= d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 .$$

Mit

$$T = \frac{R}{c}(\psi + \xi) = \frac{R}{c}\left[\tan^{-1}\left(\frac{v}{R}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{u}{R}\right)\right]$$

$$= \frac{R}{c}\left[\tan^{-1}\left(\frac{ct+r}{R}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{ct-r}{R}\right)\right]$$

$$\rho = R(\psi - \xi) = R\left[\tan^{-1}\left(\frac{v}{R}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{u}{R}\right)\right]$$

$$= R\left[\tan^{-1}\left(\frac{ct+r}{R}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{ct-r}{R}\right)\right]$$

Ist

$$g_{Mink} = \Omega^{-2}\, g_{Einst}$$

$\Omega \rightarrow$ als Fkt. v. T, ρ wie oben ang.

wobei

$$g_{Einst} = c^2\, dT^2 - \underbrace{\left[d\rho^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{\rho}{R}\right) g_1^{(2)}\right]}_{g^{(3)}_R}$$

$g^{(3)}_R$ = Metrik der S^3 vom Radius R.

und

$$\Omega^2 = 4\cos^2\left(\frac{cT+\rho}{2R}\right)\cos^2\left(\frac{cT-\rho}{2R}\right)$$

$$= 4\cos^2\psi\cos^2\xi$$

Der Koordinatenbereich ist

$$-R\pi < cT+\rho < R\pi$$

$$-R\pi < cT-\rho < R\pi$$

$$\rho \geq 0$$

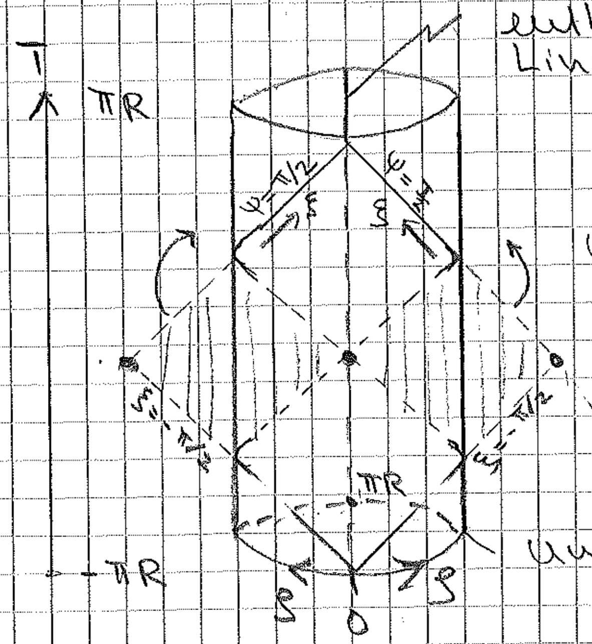
entsprechend

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}$$

$$\psi \geq \xi .$$

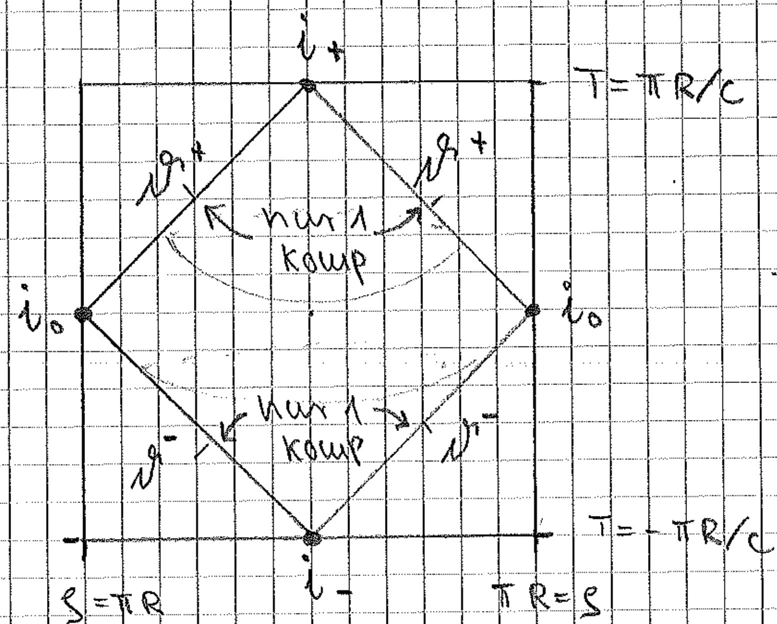
entlang dieser vertikalen Linie aufschneiden



Um den Zylinder herum-klappen

Umfang $2\pi R$

$\Downarrow$



2-dim Darstellung

$(T = \pm \pi R, \rho = 0)$ $\quad i_\pm$ = „future / past timelike infinity" $\cong \{p\}$

$(cT \pm \rho)$ $\quad \mathcal{J}^\pm$ = „future / past lightlike infinity" $\cong \mathbb{R} \times S^2$

$(T = 0, \rho = \pi R)$ $\quad i_0$ = „spacelike infinity" $\cong \{p\}$

Damit ist der Minkowski-Raum konform isometrisch in das statische Einstein-Universum (Topologisch $\mathbb{R}\times S^3$) eingebettet. Das Bild der Einbettung ist das Innere des diamantförmigen Gebiets

$$-\pi R \leq cT \leq \pi R$$
$$0 \leq \varrho \leq \pi R$$

$$\varrho + |cT| \leq \pi R$$

Der Rand dieses Gebiets besteht aus 3 Punkten und zwei Mannigfaltigkeiten $\cong \mathbb{R}\times S^2$:

$$\text{Rand} = \underbrace{i_+ \cup i_0 \cup i_-}_{\text{Punkte}} \cup \underbrace{\mathscr{I}^+ \cup \mathscr{I}^-}_{\cong \mathbb{R}\times S^2}$$

$$i_+ = (cT = \pi R,\ \varrho = 0) = (\psi = \tfrac{\pi}{2},\ \xi = \tfrac{\pi}{2})$$

$$i_- = (cT = -\pi R,\ \varrho = 0) = (\psi = -\tfrac{\pi}{2},\ \xi = -\tfrac{\pi}{2})$$

$$i_0 = (cT = 0,\ \varrho = \pi R) = (\psi = \tfrac{\pi}{2},\ \xi = -\tfrac{\pi}{2})$$

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{I}^+ &= \{0 < cT < \pi R,\ \varrho + cT = \pi R\} \\ &= \{\psi = \pi/2,\ -\tfrac{\pi}{2} < \xi < \tfrac{\pi}{2}\}\end{aligned}\right\} \text{"future null infinity"}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{I}^- &= \{-\pi R < cT < 0,\ \varrho - cT = \pi R\} \\ &= \{-\tfrac{\pi}{2} < \psi < \tfrac{\pi}{2},\ \xi = -\pi/2\}\end{aligned}\right\} \text{"past null infinity"}$$

Der konforme Faktor ist als Funktion der Winkel φ und ξ

$$\Omega(\varphi,\xi) = 2\cos\varphi\cos\xi$$

$$\curvearrowright \quad d\Omega = -2\,[\sin\varphi\cos\xi\, d\varphi + \cos\varphi\sin\xi\, d\xi]$$

$$\Rightarrow \quad d\Omega(i^0) = 0$$

$$d\Omega|_{\mathcal{N}^+} = -2\cos\xi\, d\varphi$$

$$d\Omega|_{\mathcal{N}^-} = +2\cos\varphi\, d\xi$$

Die Metrik g_E des einbettenden Einstein Universums ist in (φ,ξ) Koordinaten

$$g_E = R^2[4\,d\varphi\otimes d\xi - \sin^2(\varphi-\xi)\, g^{(2)}_1]$$

Also ist das Gradientenfeld von Ω auf $\mathcal{N}^+, \mathcal{N}^-$

$$\nabla\Omega|_{\mathcal{N}^+} = g_E^{-1}(d\Omega,\cdot)\big|_{\mathcal{N}^+}$$

$$= -\frac{1}{2R^2}\cos\xi\,\frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$\nabla\Omega|_{\mathcal{N}^-} = \frac{1}{2R^2}\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

also lichtartig und tangential an $\mathcal{N}^\pm$.

N^+ ist eine Fläche φ = konst. und
N^- ist eine Fläche ξ = konst.

Also sind beide Nullflächen
Da $N^\pm$ Niveauflächen von Ω zum Wert Null sind ist $\nabla\Omega|_{N^\pm}$ auf $N^\pm$ aber auch tangential, also $\nabla\Omega|_{N^\pm}$ = lichtartig. Ein lichtartiges, hyperflächenorthogonales Vektorfeld ist autoparallel. Der Fluss von $\nabla\Omega$ auf $N^\pm$ ist vollständig

$$\nabla\Omega|_{N^+} = -\frac{1}{2R^2}\cos\xi\,\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{d\xi}{d\lambda}\,\frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$-\frac{d\lambda}{2R^2} = \frac{d\xi}{\cos\xi}$$

$$\Rightarrow -\frac{\lambda-\lambda_0}{2R^2} = \ln\tan\left(\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

Es ist $\tan_{\xi\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right) = \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \to +\infty$

$$\tan_{\xi\to 0}(\xi) \to 0$$

$\rightsquigarrow$ $\ln\tan(\ )\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} \to \begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}$

$\rightsquigarrow$ Parameter λ divergiert an beiden Grenzen nach $\mp\infty$.

Idee: Eine Raumzeit heisst raumartig bzw. lichtartig asymptotisch flach wenn sie lokal konform isometrisch zu einer offenen Umgebung von i_0 bzw $\mathcal{J}^{\pm}$ des konform kompaktifizierten Minkowski-Raumes ist.

Man definiert allg für Raumzeit (M,g) mit Zeitorientierung

$I^{\pm}(p) = \{ q \in M \mid \exists\, \gamma \in C^1(I, M)$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $\dot{\gamma}$ zeitartig und Zukunfts (+) bzw Vergangenheits (−) gerichtet$\}$

$J^{\pm}(p) = \{$ wie für $I^{\pm}(p)$, nur muss $\dot{\gamma}$ lediglich nicht raumartig sein – darf also lichtartig werden $\}$.

$I^{\pm}(p)$ = zeitartige Zukunft / Vergangenheit von p

$J^{\pm}(p)$ = kausale Zukunft / Vergangenheit von p

Ist $O \subset M$ Menge, so

$$I^{\pm}(O) = \bigcup_{p \in O} I^{\pm}(p)$$

$$J^{\pm}(O) = \bigcup_{p \in O} J^{\pm}(p)$$

Ist (M, g) asympt. flach, so enthält M ein schwarzes Loch $\Leftrightarrow$

$$M \neq J^-(\mathscr{I}^+)$$

und ein weißes Loch $\Leftrightarrow$

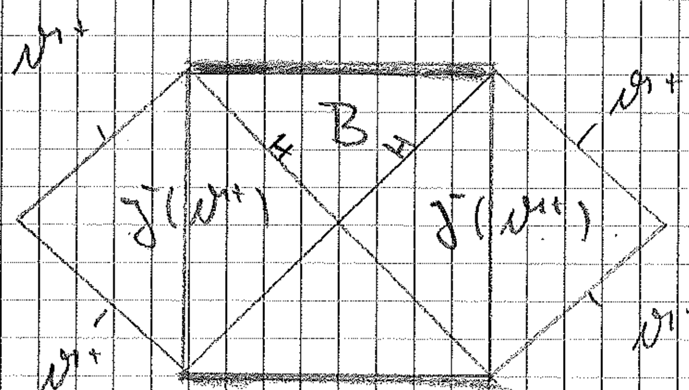
$$M \neq J^+(\mathscr{I}^-)$$

Das Innere des schwarzen Lochs ist

$$B = M - J^-(\mathscr{I}^+)$$

sein Ereignishorizont ist der Rand von B in M

$$H = \dot{J}^-(\mathscr{I}^+) \cap M.$$



Krümmung des Horizonts

ON-2 Beine

$$\theta^1 = \rho\, d\theta = (r_+^2 + a^2 \cos^2\theta)^{1/2}\, d\theta$$

$$\theta^2 = \frac{(r_+^2 + a^2)\sin\theta}{(r_+^2 + a^2\cos^2\theta)^{1/2}}\, d\varphi$$

$$d\theta^1 = 0 = -\omega^1{}_2 \wedge \theta^2$$

$$\Rightarrow \omega^1{}_2 \sim \theta^2$$

$$d\theta^2 = \left[\frac{(r_+^2 + a^2)\sin\theta}{(r_+^2 + a^2\cos^2\theta)^{1/2}}\right]_{,\theta} d\theta \wedge d\varphi$$