Verallgemeinerung der Kruskal-Konstruktion

$$g = \phi\, c^2 dt^2 - \phi^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{11.1}$$

mit $\phi = \phi(r)$

soll gleich sein

$$g = f^2(u, v)\,[dv^2 - du^2] - r^2 d\Omega^2 \tag{11.2}$$

$\Leftrightarrow$

$$f^2 (v_{ct}^2 - u_{ct}^2) = \phi$$

$$f^2 (v_r^2 - u_r^2) = -\phi^{-1}$$

$$v_{ct} v_r - u_{ct} u_r = 0$$

bzw mit

$$r_* := \int \phi^{-1}\, dr \tag{11.3}$$

$$f^2 (v_{ct}^2 - u_{ct}^2) = \phi \tag{11.4a}$$

$$f^2 (v_{r_*}^2 - u_{r_*}^2) = -\phi \tag{11.4b}$$

$$v_{ct} v_{r_*} - u_{ct} u_{r_*} = 0 \tag{11.4c}$$

$$\Rightarrow \frac{11.4a}{11.4b} = \frac{v_{ct}^2 - u_{ct}^2}{v_{r_*}^2 - u_{r_*}^2} =$$

$$= -\left(\frac{u_{ct}}{v_{r_*}}\right)^2 \underbrace{\frac{1 - (v_{ct}/u_{ct})^2}{1 - (u_{r_*}/v_{r_*})^2}}_{= 1 \text{ wegen } (11.4c)} = -1$$

Wieder folgt durch 1. Gl. + 2. Gl. $\pm$ 2×3. Gl.:

$$(v_{ct} \pm v_{r*})^2 = (u_{ct} \pm u_{r*})^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{ct} + v_{r*} = \varepsilon_+ (u_{ct} + u_{r*})$$

$$v_{ct} - v_{r*} = \varepsilon_- (u_{ct} - u_{r*})$$

Wobei ε_+ und ε_- zunächst unabhängig voneinander die Werte ± 1 annehmen

Ist $\varepsilon_+ = \varepsilon_-$, dann

$$v_{ct} = \varepsilon_+ u_{ct}$$
$$v_{r*} = \varepsilon_+ u_{r*}$$

und

$$\left| \frac{\partial(v,u)}{\partial(ct,r*)} \right| = \begin{vmatrix} v_{ct} & u_{ct} \\ v_{r*} & u_{r*} \end{vmatrix} = v_{ct} u_{r*} - u_{ct} v_{r*} = 0$$

Also muß $\varepsilon_+ = -\varepsilon_-$ sein.

1. Fall: $\quad v_{ct} + v_{r*} = u_{ct} + u_{r*}$

$$v_{ct} - v_{r*} = -(u_{ct} - u_{r*})$$

$$\Longleftrightarrow \quad v_{ct} = u_{r*}$$
$$v_{r*} = u_{ct}$$

2. Fall $\quad v_{ct} + v_{r*} = -(u_{ct} + u_{r*})$

$$v_{ct} - v_{r*} = u_{ct} - u_{r*}$$

$$\Longleftrightarrow \quad v_{ct} = -u_{r*}, \quad v_{r*} = -u_{ct}$$

1. Fall: Die Allgemeine Lösung ist

$$v = h(r_* + ct) + g(r_* - ct)$$

$$u = h(r_* + ct) - g(r_* - ct)$$

Eingesetzt in (11.6) ergibt, daß (11.6 c) identisch erfüllt ist und (11.6 a) und (11.6 b) die identische Bedingung fordern:

$$4 h' g' = - F = - \phi / f^2$$

Wie zuvor folgt

$$h(r_* + ct) = \frac{1}{2} \exp(\eta(r_* + ct))$$

$$g(r_* - ct) = - \frac{1}{2} \exp(\eta(r_* - ct))$$

$$F(r_*) = \eta^2 \exp(2\eta r_*)$$

$\wedge$

$$v = \exp(\eta r_*) \sinh(\eta ct)$$

$$u = \exp(\eta r_*) \cosh(\eta ct)$$

Die Funktion $f(u,v)$ folgt aus (11.6a)

$$f^2(u,v) = \phi(r) / F(r_*)$$

$$= \eta^{-2} \phi(r) \exp(-2\eta r_*).$$

Wir setzen nun voraus, daß

$$-4 h' g' = \phi / f^2 =: F$$

nur von r_* abhängt; denn damit f endlich an den Nullstellen von ϕ bleibt für alle t, muß ϕ/f^2 von t unabhängig sein.

$$-4 h'(r_* + ct)\, g'(r_* - ct) = F(r_*)$$

$$\partial_{r_*} : -4(h'' g' + h' g'') = F'$$

$$\partial_{ct} : -4(h'' g' - h' g'') = 0$$

$$\curvearrowright \quad h''/h' = g''/g'$$

$$\curvearrowright \quad \underset{\substack{\uparrow \\ r_* + ct}}{\frac{h''}{h'}} = \underset{\substack{\uparrow \\ r_* - ct}}{\frac{g''}{g'}} = \underset{\substack{\uparrow \\ r_*}}{\frac{1}{2}\frac{F'}{F}}$$

$$\Rightarrow \frac{h''}{h'} = \frac{g''}{g'} = \frac{1}{2}\frac{F'}{F} = \eta$$

$$h = A \exp(\eta(r_* + ct))$$

$$g = B \exp(\eta(r_* - ct))$$

$$\Rightarrow -4 AB \eta^2 \exp(2\eta r_*) = F(r_*).$$

Ist $F > 0$, d.h. $\phi > 0$ so kann man

$$A = -B = \frac{1}{2}$$

wählen. Für $F < 0$, d.h. $\phi < 0$, entsprechend

$$A = B = \frac{1}{2}$$

Fall $\phi > 0$

$$h = \frac{1}{2} \exp(\eta(r_* + ct))$$

$$g = -\frac{1}{2} \exp(\eta(r_* - ct))$$

$$\rho^2 = \phi \, \eta^{-2} \exp(-2\eta r_*)$$

Nun muß η so bestimmt werden, daß ρ^2 positiv und regulär an den Nullstellen von ϕ ist.

Beispiel: $\phi(r) = \frac{1}{r^2}(r - r_+)(r - r_-)$

vgl. Reißner Nordström mit $m^2 > q^2$, wobei

$$r_\pm = m \pm (m^2 - q^2)^{1/2}$$

$$\rightsquigarrow \quad r_* = \int \frac{r^2 \, dr}{(r-r_+)(r-r_-)} = \frac{1}{r_+ - r_-} \int dr \, r^2 \left(\frac{1}{r-r_+} - \frac{1}{r-r_-} \right)$$

$$= \frac{1}{r_+ - r_-} \left\{ \int \frac{(z_+ + r_+)^2}{z_+} dz_+ - \int \frac{(z_- + r_-)^2}{z_-} dz_- \right\} \qquad \begin{array}{l} z_+ = r - r_+ \\ z_- = r - r_- \end{array}$$

$$= \frac{1}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{1}{2} \cdot (r - r_+)^2 + 2 r_+ (r - r_+) + r_+^2 \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} (r - r_+)^2 - 2 r_- (r - r_-) - r_-^2 \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right\}$$

$$+ \text{konst.}$$

$\Downarrow$

$$r_* = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right)$$

wobei $\text{konst} = r_+^2 - r_-^2$ gewählt wurde

Also ist f^2 gleich

$$f^2 = \eta^{-2} \frac{1}{r^2} (r - r_+)(r - r_-) \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{-2\eta \frac{r_+^2}{r_+ - r_-}} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{+2\eta \frac{r_-^2}{r_+ - r_-}}$$

$$\times \exp(-2\eta r)$$

$$= \eta^{-2} \frac{r_+ r_-}{r^2} \exp(-2\eta r)$$

$$\times \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1 - 2\eta r_+^2/(r_+ - r_-)}$$

$$\times \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{1 + 2\eta r_-^2/(r_+ - r_-)}$$

Damit f bei $r = r_+$ regulär und $\neq 0$ bleibt, muß der Exponent von $(r/r_+ - 1)$ verschwinden

$$\Longrightarrow \eta = \frac{1}{2} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}.$$

Somit ergibt sich für die Koordinatentransformation $(t, r) \to (v, u)$ im Gebiet $r > r_+$

$$\rho^2 = \left(\frac{2r_+}{r_+ - r_-}\right)^2 \frac{r + r_-}{r^2} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1 + \frac{r_-^2}{r_+^2}} \exp\left(-r \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right)$$

$$v = \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\frac{1}{2}\frac{r_-^2}{r_+^2}} \exp\left(\frac{r}{2} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right) \sinh\left(\frac{ct}{2} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right)$$

$$u = \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\frac{1}{2}\frac{r_-^2}{r_+^2}} \exp\left(\frac{r}{2} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right) \cosh\left(\frac{ct}{2} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right)$$

Mit der Umkehrung

$$ct = \frac{2r_+^2}{r_+ - r_-} \tanh^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)\left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\frac{r_-^2}{r_+^2}} \exp\left(r \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right)$$

Im Bereich $r_- < r < r_+$ ist

$$F(r_*) = \phi / \rho^2 < 0$$

Dann müssen wegen $-4h'g' = F$ A und B gleiches Vorzeichen haben

Fall $\phi < 0$

$$h = \frac{1}{2} \exp(\eta (r_* + ct))$$

$$g = \frac{1}{2} \exp(\eta (r_* - ct))$$

$$F = -\eta^2 \exp(2\eta r_*)$$

Außerdem

$$r_* = r + \frac{r_+^2}{r_+-r_-}\ln\left(1-\frac{r}{r_+}\right) - \frac{r_-^2}{r_+-r_-}\ln\left(\frac{r}{r_-}-1\right)$$

Es folgt im Bereich $r_- < r < r_+$

$$f^2 = \left(\frac{2r_+}{r_+-r_-}\right)^2 \frac{r_+ r_-}{r^2}\left(\frac{r}{r_-}-1\right)^{1+\frac{r_-^2}{r_+^2}} \exp\left(-r\,\frac{r_+-r_-}{r_+^2}\right)$$

$$v = \left(1-\frac{r}{r_+}\right)^{1/2}\left(\frac{r}{r_-}-1\right)^{-\frac{1}{2}\frac{r_-^2}{r_+^2}} \exp\left(\frac{r}{2}\,\frac{r_+-r_-}{r_+^2}\right)\cosh\left(\frac{ct}{2}\,\frac{r_+-r_-}{r_+^2}\right)$$

$$u = \left(1-\frac{r}{r_+}\right)^{1/2}\left(\frac{r}{r_-}-1\right)^{-\frac{1}{2}\frac{r_-^2}{r_+^2}} \exp\left(\frac{r}{2}\,\frac{r_+-r_-}{r_+^2}\right)\sinh\left(\frac{ct}{2}\,\frac{r_+-r_-}{r_+^2}\right)$$

Mit Umkehrung

$$ct = \frac{2r_+^2}{r_+-r_-}\tanh\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$u^2 - v^2 = \left(1-\frac{r}{r_+}\right)\left(\frac{r}{r_-}-1\right)^{-\frac{r_-^2}{r_+^2}} \exp\left(r\,\frac{r_+-r_-}{r_+^2}\right)$$

Die Metrik

$$g = f^2(u,v)\,(dv^2 - du^2) - r^2(u,v)\,d\Omega^2$$

ist dann regulär $\forall\ (v,u) \in \mathbb{R}^2$

Dieser Wertebereich deckt in der (ct, r) Ebene den Bereich $r > r_-$ ab, denn für $r \searrow r_-$ werden u und v ∞. $\Longrightarrow$

Bei $r = r_-$ ist aber der Krümmungstensor beschränkt, so dass es sich wieder um eine Koordinatensingularität handelt, da $r = r_-$ endlichen metrischen Abstand von Punkten $r > r_-$ hat:

$$\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{-\phi}} = \int_{r_-}^{r_+} \frac{r\,dr}{\left[-(r-m)^2 + (m^2-q^2)\right]^{1/2}}$$

$$= \int_{r_- -m}^{r_+ -m} \frac{(z+m)\,dz}{\sqrt{-z^2+(m^2-q^2)}}$$

$$= \cancel{-\left(-z^2+m^2-q^2\right)^{1/2}\Big|_{r_- -m}^{r_+ -m}}$$

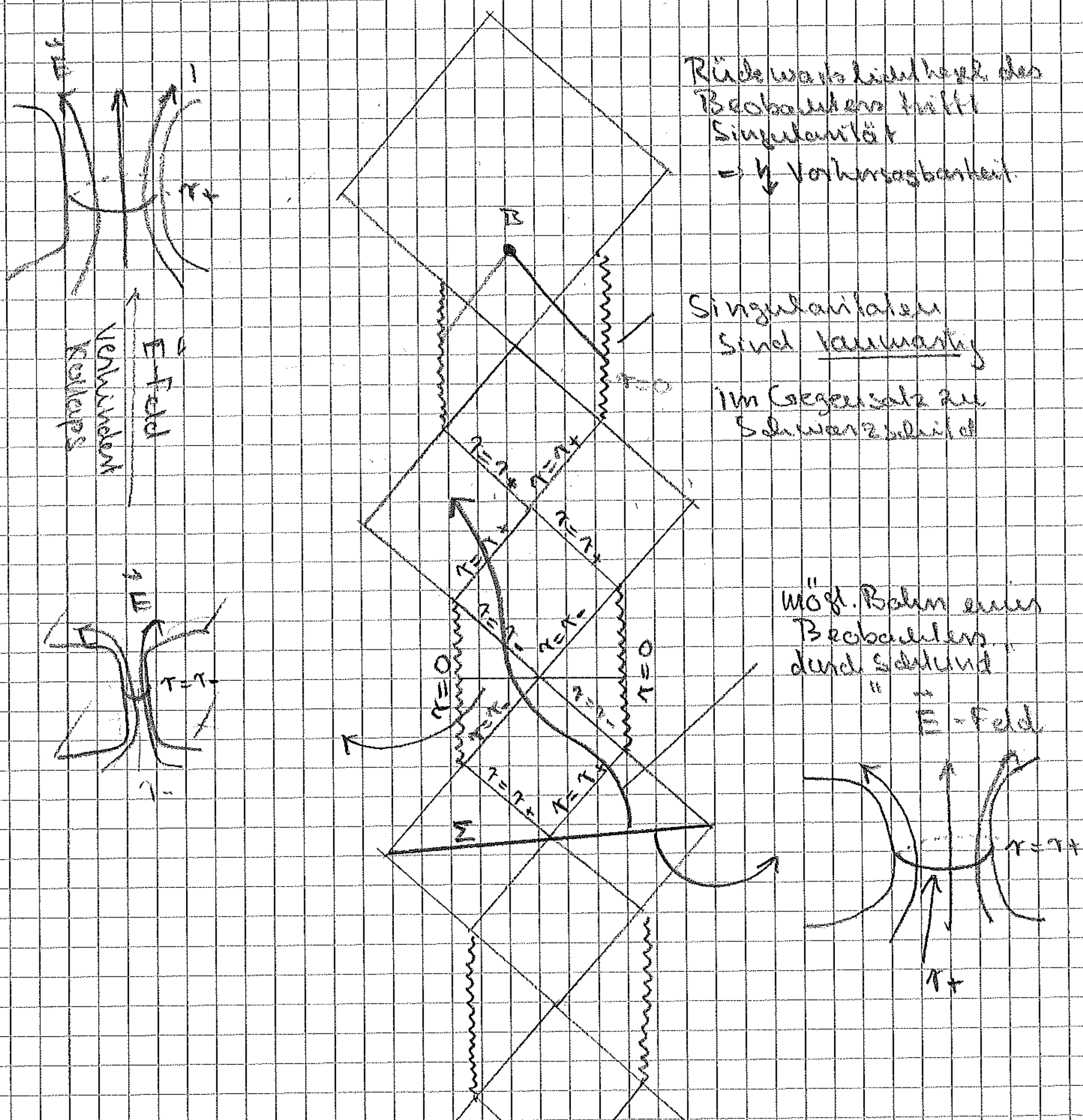
$$+\, m \int_{r_- -m}^{r_+ +m} \frac{dz}{\sqrt{(m^2-q^2)-z^2}}$$

$$= m \tan^{-1}\left[\frac{m^2-q^2}{\sqrt{(m^2-q^2)-z^2}}\right]\Bigg|_{r_- -m}^{r_+ +m}$$

$$= \pi m \; .$$

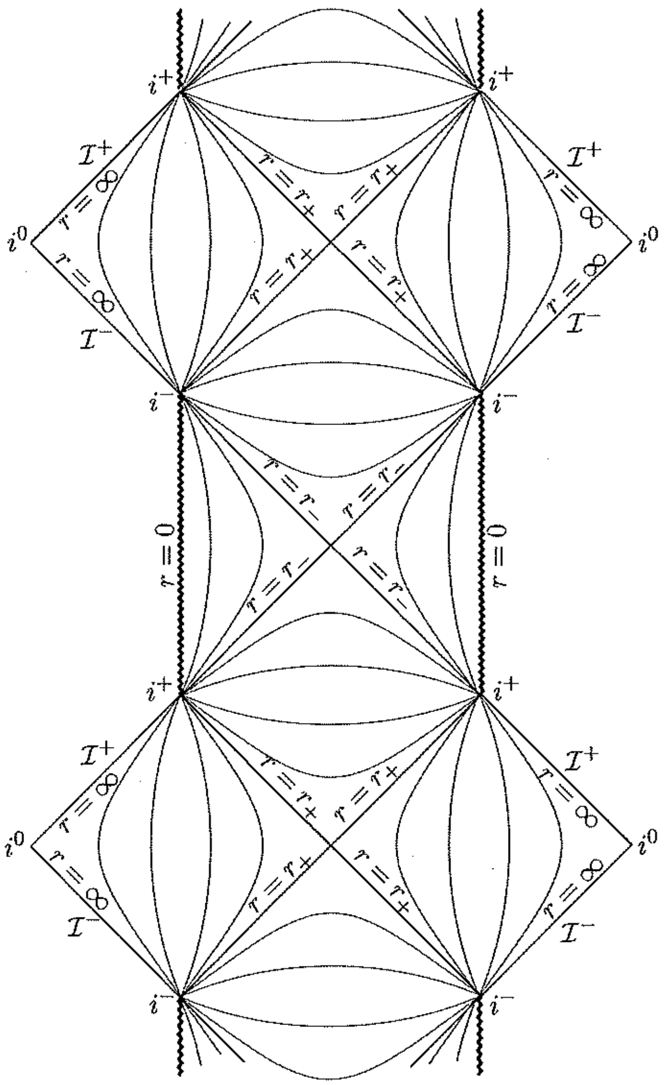
Dann nimmt man eine weitere (u,v)-Karte, in der dann die r_- - „Koordinatensingularität" regulär überdeckt wird, und klebt die beiden Gebiete an einem Radius r_c, mit $r_- < r_c < r_+$ zusammen.

Diese Prozedur kann man unendlich oft wiederholt werden, so daß sich folgendes Bild ergibt (schematisch)



Penrose-Diagramm

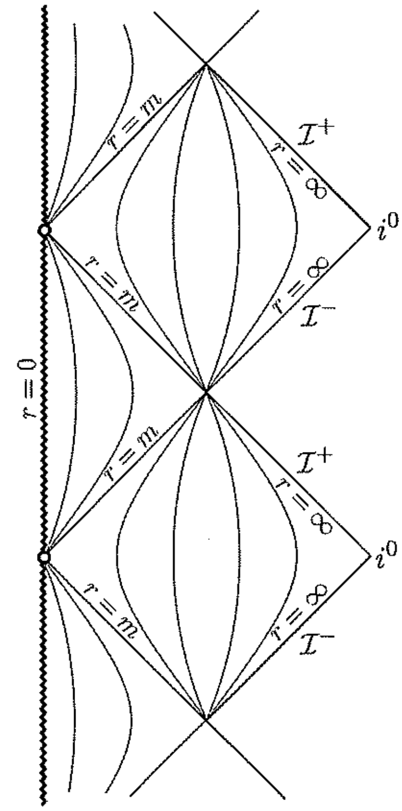
Reissner-Nordström
$q^2 < m^2$



Penrose Diagramm

Reissner - Nordström

$q^2 = m^2$



Penrose-Diagramm

Reissner-Nordström

$q^2 > m^2$