Die Kerr-Newman-Lösung

- beschreibt ein stationäres, achsensymmetrisches, schwarzes Loch mit Drehimpuls und elektrischer Ladung

- astrophysikalisch die wichtigste SL-Lösung, aber nur im ungeladenen Falle.

- Lösung der Einstein-Maxwell Gl.

- ∃ zwei kommutierende Killing-Vektorfelder

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad K_2 = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad (12.1)$$

Metrik in Boyer-Lindquist Koordinaten (t, r, θ, φ)

$$g = \frac{\Delta}{\varrho^2}\left[c\,dt - a\sin^2\theta\,d\varphi\right]^2 - \frac{\sin^2\theta}{\varrho^2}\left[(r^2+a^2)\,d\varphi - a\,c\,dt\right]^2 - \frac{\varrho^2}{\Delta}dr^2 - \varrho^2 d\theta^2 \qquad (12.2)$$

mit

$$\Delta := r^2 - 2mr + a^2 + q^2 \qquad (12.3a)$$
$$= (r-m)^2 - (m^2 - a^2 - q^2)$$

$$\varrho^2 := r^2 + a^2\cos^2\theta \qquad (12.3b)$$

Physikalische Parameter

$$m = \frac{GM}{c^2} \qquad M = \text{Masse}$$

$$ma = \frac{GJ}{c^3} \qquad J = \text{Drehimpuls}$$

d.h. $$a = \frac{J}{Mc}$$

$$q^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{GQ^2}{c^4} \quad , \quad Q = \text{Ladung}$$

Löst man (12.2) in die einzelnen Terme $\sim dx^\mu \otimes dx^\nu$ auf, so ergibt sich:

$$c^2 dt^2 : \quad \frac{\Delta}{\rho^2} - a^2 \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} = \rho^{-2}\left[\Delta - a^2 \sin^2\theta\right]$$

$$= \rho^{-2}\left[r^2 - 2mr + q^2 + a^2\cos^2\theta\right]$$

$$= 1 - \frac{2mr}{\rho^2} + \frac{q^2}{\rho^2} \qquad (12.4a)$$

$$d\varphi^2 : \quad \frac{\Delta}{\rho^2} a^2 \sin^4\theta - (r^2+a^2)^2 \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[a^2 \Delta \sin^2\theta - (r^2+a^2)^2\right]$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[a^2(r^2+a^2)\sin^2\theta + a^2(-2mr+q^2)\sin^2\theta - (r^2+a^2)^2\right]$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(r^2+a^2)\left[-r^2 - a^2\cos^2\theta\right]$$

$$- a^2(2mr - q^2)\frac{\sin^4\theta}{\rho^2}$$

$$= -(r^2+a^2)\sin^2\theta - (2mr-q^2)a^2\frac{\sin^4\theta}{\rho^2}$$

$$(12.4b)$$

$2\, d(ct)\, d\varphi$:

$$-a\sin^2\theta\,\frac{\Delta}{\varrho^2}+a(r^2+a^2)\,\frac{\sin^2\theta}{\varrho^2}$$

$$=a\,\frac{\sin^2\theta}{\varrho^2}\left[r^2+a^2-r^2-a^2-q^2+2mr\right]$$

$$=a(2mr-q^2)\,\frac{\sin^2\theta}{\varrho^2} \qquad (12.4c)$$

$$dr^2:\ -\frac{\varrho^2}{\Delta}=-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2mr+a^2+q^2}$$

$$=-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2}+\left(\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2}-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2mr+a^2+q^2}\right)$$

$$=-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2}-\frac{(r^2+a^2\cos^2\theta)(2mr-q^2)}{(r^2+a^2)(r^2+a^2-(2mr-q^2))}$$

(12.4d)

$$\Rightarrow\quad g=\left.\begin{aligned}&c^2dt^2\\&-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2}\,dr^2\\&-(r^2+a^2\cos^2\theta)\,d\theta^2\\&-(r^2+a^2)\sin^2\theta\,d\varphi^2\end{aligned}\right\}\ \eta = \text{Mink. Metrik}$$

$$-(2mr-q^2)\left\{\varrho^{-2}(c\,dt-a\sin^2\theta\,d\varphi)^2+\frac{\varrho^2}{\Delta(r^2+a^2)}\,dr^2\right\}$$

(12.5)

Konfokale Elliptische Koordinaten

Im $\mathbb{R}^3$ führen wir die Koordinaten (r, θ, φ) ein durch

$$
\begin{aligned}
x &= f(r)\sin\theta\cos\varphi \\
y &= f(r)\sin\theta\sin\varphi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
\qquad (12.6)
$$

Wir bestimmen alle Funktionen f für die die zugehörigen Koordinatenlinien wechselseitig aufeinander senkrecht stehen. Dazu reicht es aus, wenn die Linien $r = \text{konst}$ und $\theta = \text{konst}$ in der xz-Ebene $\varphi = 0$ senkrecht zueinander verlaufen.

Mit $x = f(r)\sin\theta$, $z = r\cos\theta$

ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= x_{,r}\,\partial_x + z_{,r}\,\partial_z \\
&= f'\sin\theta\,\partial_x + \cos\theta\,\partial_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} &= x_{,\theta}\,\partial_x + z_{,\theta}\,\partial_z \\
&= f\cos\theta\,\partial_x - r\sin\theta\,\partial_z
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \langle \partial_r, \partial_\theta \rangle_{\text{Eukl.}} = (f f' - r)\sin\theta\cos\theta$$

$$= 0 \iff \tfrac{1}{2}(f^2)' = r \iff f^2 = r^2 + C \qquad (12.7)$$

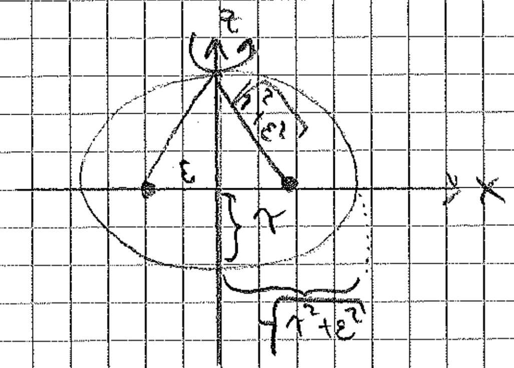
Wir wählen $C > 0$, so daß $C = \varepsilon^2$.
Also

$$x = (r^2+\varepsilon^2)^{1/2} \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = (r^2+\varepsilon^2)^{1/2} \sin\theta \sin\varphi \qquad (12.8)$$

$$z = r \cos\theta$$

Flächen $r =$ konst sind oblate Rotationsellipsoide (entlang Drehachse gestaucht)



Ihr Schnitt mit der xz-Ebene sind konfokale Ellipsen mit großen Halbachsen $(r^2+\varepsilon^2)^{1/2}$ und kleinen Halbachsen r, so daß ε gerade die Exzentrizität ist.

Die Flächen $\theta =$ konst folgen aus

$$\left(\frac{x}{\sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sin\theta}\right)^2 - \left(\frac{z}{\cos\theta}\right)^2 = \varepsilon^2 \qquad (12.9)$$

$\rightarrow$ einschalige Rotationshyperboloide, die zu den Kegeln $z/\rho = \cot\theta$ asymptotisch sind.

Für $r=0$ entarten die Rotationsellipsoide zu einer Scheibe vom Radius ε in $z=0$ Ebene:

$$x = \varepsilon \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = \varepsilon \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = 0$$

Die Jacobi-Matrix von (12.8) ist

$$X^\mu_{,\nu} = \begin{pmatrix} x_{,r} & x_{,\theta} & x_{,\varphi} \\ y_{,r} & y_{,\theta} & y_{,\varphi} \\ z_{,r} & z_{,\theta} & z_{,\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\ )^{-1/2} r \sin\theta\cos\varphi, & (\ )^{1/2}\cos\theta\cos\varphi, & -(\ )^{1/2}\sin\theta\sin\varphi \\ (\ )^{-1/2} r\sin\theta\sin\varphi, & (\ )^{1/2}\cos\theta\sin\varphi, & (\ )^{1/2}\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & , -r\sin\theta & , 0 \end{pmatrix}$$

$$g_R = \vec{X}_{,\mu}\vec{X}_{,\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu$$

$$g_{rr} = \frac{r^2}{r^2+\varepsilon^2}\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{r^2+\varepsilon^2\cos^2\theta}{r^2+\varepsilon^2}$$

$$g_{\theta\theta} = (r^2+\varepsilon^2)\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2+\varepsilon^2\cos^2\theta$$

$$g_{\varphi\varphi} = (r^2+\varepsilon^2)\sin^2\theta$$

Alle nicht-diagonalen g_{ab} sind Null (nach Konstruktion klar)

$$\Rightarrow g_R = \frac{r^2+\varepsilon^2\cos^2\theta}{r^2+\varepsilon^2}\,dr^2 + (r^2+\varepsilon^2\cos^2\theta)\,d\theta^2$$
$$+ (r^2+\varepsilon^2)\sin^2\theta\,d\varphi^2 \quad (12.10)$$

= Flache Metrik des $\mathbb{R}^3$ in elliptischen Polarkoordinaten.

Vgl. mit (12.5) zeigt, daß die Kerr-Newmann Metrik für $m = 0$ und $q = 0$ in die Minkowski-Metrik übergeht, deren räumlicher Anteil in elliptischen Koordinaten mit Ellipsen der festen Exzentrität $\varepsilon = a$.

Orthonormierte Tetraden: Aus (12.2) folgt

$$g_{\kappa\nu} = \Theta^0 \otimes \Theta^0 - \sum_{a=1}^{3} \Theta^a \otimes \Theta^a$$

$$\Theta^0 = \frac{\Delta^{1/2}}{\rho}\left[c\,dt - a\sin^2\theta\,d\varphi\right] \quad (12.11a)$$

$$\Theta^1 = \frac{\rho}{\Delta^{1/2}}\,dr \quad (12.11b)$$

$$\Theta^2 = \rho\,d\theta \quad (12.11c)$$

$$\Theta^3 = \frac{\sin\theta}{\rho}\left[(r^2+a^2)\,d\varphi - a\,c\,dt\right] \quad (12.11d)$$

Das elektrodynamische Potential ist

$$A = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right) \frac{Q r}{\varrho^2}\left(c\,dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right) \tag{12.12}$$

Die Feldstärke folgt aus

$$d\left[\frac{r}{\varrho^2}\left(c\,dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\varrho^2}\, dr \wedge \left(c\,dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)$$

$$- \frac{r}{\varrho^4}\, 2\left(r\,dr - a^2\cos\theta\sin\theta\, d\theta\right) \wedge \left(c\,dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)$$

$$- \frac{a r}{\varrho^2}\, 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \wedge d\varphi$$

$$= -\frac{2r^2 - \varrho^2}{\varrho^4}\, dr \wedge \left(c\,dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)$$

$$+ \frac{2 r a^2}{\varrho^4}\cos\theta\sin\theta\, d\theta \wedge \left(c\,dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)$$

$$- \frac{2 r a}{\varrho^4}\left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right)\sin\theta\cos\theta\, d\theta \wedge d\varphi$$

$$= -\frac{r^2 - a^2\cos^2\theta}{\varrho^4}\, dr \wedge \left(c\,dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)$$

$$+ \frac{2 r a}{\varrho^4}\cos\theta\sin\theta\, d\theta \wedge \left[a\,c\,dt - \left(r^2 + a^2\right) d\varphi\right]$$

$$= + \frac{r^2 - a^2\cos^2\theta}{\varrho^4}\, \theta^0 \wedge \theta^1 - \frac{2 r a}{\varrho^4}\cos\theta\, \theta^2 \wedge \theta^3$$

Also

$$F = dA = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left\{\frac{r^2-a^2\cos^2\theta}{\varrho^4}\,\theta^0\wedge\theta^1 - \frac{2ra}{\varrho^4}\cos\theta\,\theta^2\wedge\theta^3\right\}$$

$$= \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left\{\frac{r^2-a^2\cos^2\theta}{\varrho^4}\,[c\,dt - a\sin^2\theta\,d\varphi]\wedge dr - \frac{2ra}{\varrho^4}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\wedge[(r^2+a^2)\,d\varphi - ac\,dt]\right\} \tag{12.13}$$

Für $a=0$ stimmt dies mit dem Reißner-Nordström-Fall (10.10-11) überein

Die Feldstärken bezüglich asymptotisch normierter Koordinatenbasen sind
(Im Folgenden bez. $F_{\mu\nu}$ die Komp. bezügl. dx^μ)

$$E_{\hat r} := F_{01} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2-a^2\cos^2\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) + O(r^{-4})$$

$$E_{\hat\theta} := \frac{1}{r}F_{02} = -\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{2a^2}{\varrho^4}\cos\theta\sin\theta = O(r^{-4})$$

$$E_{\hat\varphi} := \frac{1}{r\sin\theta}F_{03} = 0$$

$$B_{\hat r} := -\frac{1}{c}\frac{1}{r^2\sin\theta}F_{23} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{2a}{cr^3}\cos\theta + O(r^{-4})$$

$$B_{\hat\theta} := -\frac{1}{c}\frac{1}{r\sin\theta}F_{31} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{a}{cr^3}\sin\theta + O(r^{-4})$$

$$B_{\hat\varphi} := -\frac{1}{c}\frac{1}{r}F_{12} = 0$$

Beachte: In MKSA-Einheiten lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dot{\vec{E}}$$

wobei $\bullet = \frac{\partial}{\partial t}$

Also mit $F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ -E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \left(\vec{\nabla}\vec{E},\ \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} - c\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = \frac{1}{c\varepsilon_0}(c\rho, -\vec{j})$$

Ein magn. Dipolfeld mit magn. Moment $\vec{\mu}$ ist gegeben durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-(\vec{\mu}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{x}}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}\left(3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{\mu}) - \vec{\mu}\right)\right)$$

Für $\vec{\mu} = \mu e_z$ ist

$$\vec{B}\cdot\vec{n} = B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\,2(\vec{\mu}\cdot\vec{n}) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{2\mu}{r^3}\cos\theta$$

$$\vec{B}_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}(\vec{\mu}\cdot e_\theta) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{\mu}{r^3}\sin\theta$$

Das elektromagnetische Feld der Kerr-Newman Lösung ist asymptotisch für $r \to \infty$ ein radiales elektrisches Feld der Ladung Q und ein magnetisches Dipolfeld mit einem Moment, daß sich aus Vergleich ergibt

$$\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \mu = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) \frac{a}{c}$$

$$\curvearrowright \quad \mu = \frac{Q}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{a}{c} = c^2 Q \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{J}{Mc}$$

$$= \frac{Q \cdot J}{M} \qquad (12.14)$$

Das „gyromagnetische Verhältnis g ist allgemein definiert durch

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{Q}{2M}\right) \cdot \vec{J} \qquad (12.15)$$

Also ist hier

$$g = 2 \qquad (12.16)$$

$K_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ ist das (bis auf Skalierung) eindeutige asymptotisch zeitartige Killing-Feld;

$K_2 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ist das (bis auf Skalierung) eindeutige Killing-Feld mit geschlossenen raumartigen Orbits

$\Rightarrow$ Die folgenden Funktionen sind geometrisch (d.h. unabhängig von Koordinatensystemen) definiert

$$g(K_1, K_1) = g_{00}$$

$$g(K_1, K_2) = g_{03}$$

$$g(K_2, K_2) = g_{33}$$

$$g_{00} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} \tag{12.17a}$$

$$g_{33} = -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta\right] \tag{12.17b}$$

$$g_{03} = \frac{a \sin^2\theta}{\rho^2}\left(r^2 + a^2 - \Delta\right)$$

$$= \frac{a \sin^2\theta}{\rho^2}\left(2mr - q^2\right) \tag{12.17c}$$

Physikalische Interpretation

Aus Lösung der linearisierten Einstein-gleichung

$$g = \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1+\frac{2m}{r}\right) d\vec{x}\cdot d\vec{x}$$

$$+ \frac{4G}{c^3 r^3}(\vec{J}\times\vec{x})_a \, dx^a \, d(ct) \qquad (12.18)$$

Vgl. mit asymptotischer Form der Kerr-Newman-Metrik

$$g_{00}(r\to\infty) = \left(1-\frac{2m}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$m = GM/c^2$$

$$g_{03}(r\to\infty)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2ma}{r} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Vgl. mit linearisierter Form liefert

$$ma = \frac{GJ}{c^3}$$

$$a = \frac{GJ}{c^3} \Big/ \frac{GM}{c^2} = \frac{J}{Mc}$$

$$\frac{a}{m} = \frac{J}{Mc} \Big/ \frac{GM}{c^2} = \frac{Jc}{GM^2} \qquad (12.19)$$

Dimensionslos

Beispiel: Homogene Vollkugel

Dichte $\rho = \text{konst} = M / \frac{4}{3}\pi R^3$

Trägheitsmoment $I = \frac{2}{5} M R^2$

$R = 1\,m$, $M = 1000\,Kg = 10^3\,Kg$

$J = I\omega$, $I = \frac{2}{5}\, 10^3\, Kg\, m^2$

$$\frac{a}{m} = \frac{Jc}{GM^2} = \frac{2}{5}\, 10^3 \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\, 10^6}\, (\omega \cdot s)$$

$$\cong \frac{1}{5} \cdot 10^{16}\, (\omega \cdot s)$$

$$\curvearrowright \quad \omega = \left(\frac{a}{m}\right)\; 5 \times 10^{-16}\, s^{-1}$$

Damit $\left(\frac{a}{m}\right) < 0$ muß also die Winkelgeschwindigkeit sehr klein sein.

Für die Rotationsfrequenz / Periode erhält man

$$\nu < \frac{5}{2\pi} \times 10^{-16}\, s^{-1} \cong \frac{5}{2\pi} \times 10^{-16} \times \pi \cdot 10^7\, y^{-1}$$

[1 Jahr = $\pi \times 10^7$ sec]

$$\nu < 2{,}5 \times 10^{-9}\, y^{-1}$$

$$T > 4 \times 10^8 \text{ Jahre !}$$

Horizonte und Grenzen der Stationarität in der KN-Geometrie

$K_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ ist zeitartig für $g_{00} > 0$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta - a^2 \sin^2\theta > 0$$

$$r^2 - 2mr + q^2 + a^2\cos^2\theta > 0$$

Nullstellen

$$\tilde{r}_\pm = m \pm \left(m^2 - q^2 - a^2\cos^2\theta\right)^{1/2} \qquad (12.20)$$

K_1 zeitartig $\Leftrightarrow$ $r < r_-$ oder $r > r_+$

raumartig $\Leftrightarrow$ $r_- < r < r_+$

lichtartig $\Leftrightarrow$ $r = r_-$ oder $r = r_+$

Trotzdem gibt es stationäre Beobachter in der Region $r < r_+$, nur müssen diese gegenüber K_1 (und damit gegenüber dem Beobachter im räumlich entfernten Bereichen) rotieren. !

Mit K_1 und K_2 ist auch

$$K = K_1 + \Omega K_2$$

[Achtung: wegen $K_1 = \left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial}{\partial t}$ ist die in ct

gemessene Winkelgeschwindigkeit.
Die in t gemessene ist Ω.]

Unterhalb r_+ muss dann $\Omega \neq 0$ sein.

$$g(K,K) = g_{00} + 2\Omega g_{03} + \Omega^2 g_{33}$$

$g(K,K) > 0$ (K zeitartig) $\Leftrightarrow$

$$\Omega^2 + 2\Omega \frac{g_{03}}{g_{33}} + \frac{g_{00}}{g_{33}} < 0$$

[wir haben durch $g_{33} < 0$ dividiert].

Nullstellen

$$\Omega_\pm = W \pm \left(W^2 - \frac{g_{00}}{g_{33}}\right)^{1/2} \qquad (12.21)$$

mit $W := - g_{03} / g_{33}$

K zeitartig $\Leftrightarrow$ $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$

Damit reelle Wurzeln $\Omega_\pm$ existieren muss

$$W^2 \geq g_{00} / g_{33}$$

$$\left(\frac{g_{03}}{g_{33}}\right)^2 \geq \frac{g_{00}}{g_{33}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (g_{03})^2 - g_{00} g_{33} \geq 0$$

Die Existenz stationärer Beobachter ist also äquivalent mit der Bedingung

$$(g_{03})^2 - g_{00} g_{33} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 \sin^4\theta}{\rho^4} (r^2 + a^2 - \Delta)^2$$

$$+ \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} \cdot \frac{(r^2+a^2)^2 \sin^2\theta - \Delta a^2 \sin^4\theta}{\rho^2} > 0$$

Die zwei Terme ohne Δ heben sich weg, genauso die zwei Terme $\sim \Delta^2$. Es bleibt

$$\Delta \Big[-2(r^2+a^2) \frac{a^2 \sin^4\theta}{\rho^4} + \frac{(r^2+a^2)^2 \sin^2\theta}{\rho^4}$$

$$+ \frac{a^4 \sin^6\theta}{\rho^4} \Big]$$

$$= \Delta \frac{\sin^2\theta}{\rho^4} \Big[(r^2+a^2)^2 - 2 \sin^2\theta \, a^2 (r^2+a^2)$$

$$+ a^4 \sin^4\theta \Big]$$

$$= \Delta \frac{\sin^2\theta}{\rho^4} \underbrace{\left(r^2 + a^2 - a^2 \sin^2\theta\right)^2}_{(r^2+a^2\cos^2\theta)^2}$$

$$= \Delta \sin^2\theta \qquad (12.22)$$

Also existieren stationäre Beobachter genau dann, wenn

$$\Delta > 0$$

Nun ist $\Delta = 0 \iff r^2 - 2mr + a^2 + q^2 = 0$

$$\iff r = r_\pm = m \pm (m^2 - a^2 - q^2)^{1/2} \qquad (12.23)$$

Für stationäre Schwarze Löcher wird die Existenzgrenze für stationäre Beobachter gerade durch den Ereignishorizont markiert

Damit überhaupt Nullstellen d.h. Horizonte existieren, muss gelten

$$m \geq (a^2 + q^2)^{1/2} \qquad (12.24)$$

In diesem Falle ist $K = K_1 + \Omega K_2$ zeitartig falls

$$r > r_+ = m + (m^2 - a^2 - q^2)^{1/2} > m$$

Vgl. mit Bed. dafür, daß K_1 zeitartig ist

$$r > \tilde{r}_+ = m + (m^2 - q^2 - a^2\cos^2\theta)^{1/2}$$

Für $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ist $\tilde{r}_+ > r_+$

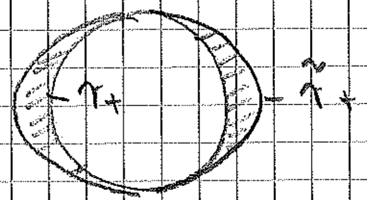
Für $\theta = 0, \pi/2$ ist $\tilde{r}_+ = r_+$

Ein stationärer Beobachter muß also rotieren (relativ zu K_∞) falls

$$r_+ < r < \tilde{r}_+$$

$$m + (m^2 - a^2 - q^2)^{1/2} < r < m + (m^2 - q^2 - a^2\cos^2\theta)^{1/2}$$

Diesen Bereich nennt man (nach Penrose) die Ergoregion.



Wir hatten für die Rotationsgeschwindigkeit

$$\Omega_\pm = w \pm (w^2 - g_{00}/g_{33})^{1/2}$$

mit $w = -g_{03}/g_{33}$

Der Horizont ist

$$H = \{(t, r, \theta, \varphi) \mid g_{03}^2 - g_{00}\, g_{33} = 0\}$$

Auf ihm gibt es nur eine Lösung

$$\Omega_+ = \Omega_- = \Omega_H := w$$

$$= -g_{03}/g_{33}\Big|_{\Delta=0}$$

Es ist

$$\Omega_H = \left\{ \frac{a \sin^2\theta}{\rho^2}\left(r^2+a^2-\Delta\right) \Big/ \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)^2-\Delta a^2 \sin^2\theta\right] \right\}_{r_+}$$

$$= \frac{a}{r_+^2+a^2} = \frac{a}{2mr_+-q^2} \qquad (12.25)$$

da $r_+^2 = 2mr_+ - q^2 - a^2$

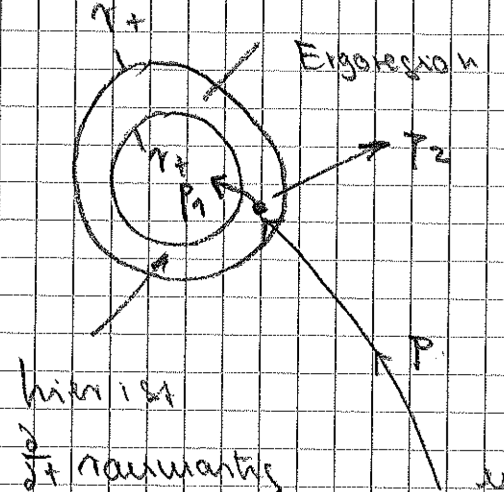
Man nennt $c\,\Omega_H$ die Winkelgeschwindigkeit des Horizonts

$$c\,\Omega_H = \frac{c\,a}{2mr_+-q^2} \qquad (12.26)$$

(Winkelgeschwindigkeit des Horizonts)

Beachte, daß der Horizont starr (nicht differentiell) rotiert, d.h. Ω_H hängt nicht von θ ab.

Penrose Mechanismus zur Energie-extraktion aus einem rotierenden SL.



$E_2 > E$

einfallendes Teilchen der Energie $E = g(K_1, p)$

Energieerhaltung

$E = g(K_1, p)$ = erhalten entlang Geodätischer

$= g(K_1, p_1 + p_2)$

wegen Energieerhaltung am Wechselwirkungspunkt

Ist nun p_1 so, daß $g(K_1, p_1) < 0$, was möglich ist da in der Ergoregion K_1 raumartig ist, so muß also gelten

$E_2 = g(K_1, p_2) = E - g(K_1, p_1) > E.$

(Löst Energie- und Müllprobleme)

Horizontfläche und Smarr-Formel.

Sei $\Sigma := \{(t,r,\theta,\varphi) \mid t = 0,\ r = r_+\}$

= Schnitt des Ereignishorizonts mit Fläche t = konst.

Dieser Schnitt ist eine raumartige eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension 2. Die auf ihr induzierte Metrik ist

$$g_\Sigma = \rho^2\, d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\,(r_+^2 + a^2)^2\, d\varphi^2$$

$$= \theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2 \qquad (12.27)$$

$$\theta^1 = \rho\, d\theta = (r_+^2 + a^2\cos^2\theta)^{1/2}\, d\theta \qquad (12.28a)$$

$$\theta^2 = \frac{(r_+^2 + a^2)\sin\theta}{(r_+^2 + a^2\cos^2\theta)^{1/2}}\, d\varphi \qquad (12.28b)$$

Der Flächeninhalt beträgt

$$A = \int \theta^1 \wedge \theta^2 = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 4\pi\left[2mr_+ - q^2\right]$$

$$= 4\pi\left[2m^2 + 2\left(m^4 - (ma)^2 - m^2q^2\right)^{1/2} - q^2\right]$$

$$= 4\pi\left[2m^2 + 2\left(m^4 - \ell^2 - m^2q^2\right)^{1/2} - q^2\right] \qquad (12.29)$$

Dabei haben wir

$$\ell := ma = \frac{GJ}{c^3} \tag{12.30}$$

als Drehimpuls (in geometrischen Einheiten) eingeführt.

Die Relation $A(m, \ell, q)$ können wir nach m als Funktion von (A, ℓ, q) auflösen: Quadrieren von (12.29) liefert

$$\left(\frac{A}{4\pi} + q^2 - 2m^2\right)^2 = 4\left(m^4 - \ell^2 - m^2 q^2\right)$$

$$\left(\frac{A}{4\pi}\right)^2 + q^4 + \cancel{4m^4} + 2q^2\left(\frac{A}{4\pi}\right) - 4m^2\left(\frac{A}{4\pi}\right) - \cancel{4m^2q^2}$$

$$= \cancel{4m^4} - 4\ell^2 - \cancel{4m^2q^2}$$

$$\rightsquigarrow \left(\frac{A}{4\pi}\right) + \frac{4\pi}{A} q^4 + 2q^2 - 4m^2 + \left(\frac{4\pi}{A}\right) 4\ell^2$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \left[\left(\frac{A}{16\pi}\right) + \frac{4\pi}{A}\ell^2 + \frac{q^2}{2} + \frac{\pi q^4}{A}\right]^{1/2} \tag{12.31}$$

$$= \left[\left(\left(\frac{A}{16\pi}\right)^{1/2} + \frac{q^2}{4}\left(\frac{16\pi}{A}\right)^{1/2}\right]^2 + \left(\frac{16\pi}{A}\right)\frac{1}{4}\ell^2\right]^{1/2}$$

Es gilt

$$m(\lambda A, \lambda \ell, \lambda q^2) = \lambda^{1/2}\, m(A, \ell, q^2)$$

(Homogene Funktion vom Grad $\frac{1}{2}$). (12.31)

Wendet man auf (12.31) den Operator

$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1}$ an, so folgt

$$A \frac{\partial m}{\partial A} + l \frac{\partial m}{\partial l} + \underbrace{q^2 \frac{\partial m}{\partial q^2}}_{\frac{q}{2} \frac{\partial m}{\partial q}} = \frac{1}{2} m$$

Wir nennen

$$\frac{\partial m}{\partial A} = T = \text{Oberflächenspannung}$$

$$\frac{\partial m}{\partial l} = \Omega = \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$\frac{\partial m}{\partial q} = \Phi = \text{elektrisches Potential}$$

(alle Größen in geom. Einheiten)

und erhalten die wichtige Formel

$$m = 2\,AT + 2\,l\,\Omega + q\,\Phi$$

„Smarr-Formel" (1972)

Aus (12.31) folgt

$$T = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{32\pi} - \frac{2\pi\lambda^2}{A^2} - \frac{\pi q^4}{2A^2}\right]$$

$$\Omega = \frac{1}{m}\ \frac{4\pi\lambda}{A}$$

$$\Phi = \frac{1}{m}\left[\frac{q}{2} + \frac{2\pi q^3}{A}\right]$$

Deutung: Wir beginnen von unten nach oben.

$$\Phi: = \frac{1}{m}\ \frac{q}{2}\left[1 + \frac{4\pi q^2}{A}\right]$$

$$= \frac{1}{m}\ \frac{q}{2}\left[1 + \frac{q^2}{r_+^2 + a^2}\right] \quad (\text{wg. } (12.29))$$

$$= \frac{1}{m}\ \frac{q}{2}\ \frac{2mr_+}{r_+^2+a^2} \quad (\text{wg. } r_+^2 - 2mr_+ + a^2 + q^2 = 0)$$

$$= \frac{q r_+}{r_+^2 + a^2}$$

Es war $A = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) \frac{r}{\rho^2}\left(c\,dt - a \sin^2\theta\, d\varphi\right)$

Kontraktion mit $K = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$

$$A(K) = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) \frac{r}{\rho^2}\left(1 - a\,\Omega \sin^2\varphi\right)$$

Auswerten auf dem Horizont $r = r_+$,

wo $\Omega = \Omega_H = a/(r_+^2 + a^2)$,

$$A(K) = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right) \frac{r_+}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\ \frac{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}{r_+^2 + a^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{r_+}{r_+^2 + a^2}$$

Also

$$\Phi = \left(\frac{q}{Q}\, 4\pi\varepsilon_0\right) \quad A(K)$$

A(K) ist aber gerade das skalare elektrische Potential, das der entlang K bewegte „Beobachter" misst.

Der Beitrag

$$(dm)_q = \Phi\, dq = \frac{q}{Q}\,(4\pi\varepsilon_0)\, A(K)\, dq$$

wird mit $q^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{G Q^2}{c^4}$ zu

$$(dm)_q = \frac{G}{c^4}\, A(K)\, dQ$$

was wegen $m = \frac{G}{c^2} M$ einem Energiebetrag

$$(dE)_q = c^2\, dM = A(K)\, dQ$$

entspricht.

$$\Omega = \frac{1}{m}\,\frac{4\pi l}{A} = \frac{4\pi a}{4\pi(r_+^2+a^2)} \quad (\text{wg } l = ma \text{ u. } (12.29))$$

$$= \Omega_H \quad (\text{wg. } (12.25))$$

Der Beitrag

$$(dm)_l = \Omega\, dl = \Omega_H\, dl$$

$$l = m \cdot a = \frac{GM}{c^2}\cdot\frac{J}{Mc} = \frac{G}{c^3} J \quad \wedge \quad dl = \frac{G}{c^3}\, dJ$$

$$\frac{G}{c^2}\, dM = (c\,\Omega_H)\,\frac{G}{c^4}\, dJ$$

$$\curvearrowright \quad (dE)_J = c^2\, dM = (c\,\Omega_H)\, dJ$$

da $c\,\Omega_H$ = Winkelgeschw. des Horizonts, entspricht dies genau dem Differential der kinetischen Rotationsenergie.

Um den Ausdruck für T auszuwerten gehen wir von der Smarr-Formel aus und lösen diese nach T auf

$$T = \frac{1}{2A}\left[m - 2 \ell \Omega - q \Phi \right]$$

Es ist nach den erhaltenen Resultaten für Ω und Φ

$$T = \frac{1}{2A}\left[m - 2ma\,\frac{4\pi a}{A} - \frac{q^2 r_+}{A}\, 4\pi \right]$$

$$= \frac{1}{2A}\left[m - 2m\,\frac{4\pi(a^2 + r_+^2)}{A} + \frac{8\pi m r_+^2}{A} - \frac{4\pi q^2 r_+}{A} \right]$$

$$= \frac{1}{2A}\left[-m + \frac{4\pi r_+}{A}\,(2 m r_+ - q^2) \right]$$

$$= \frac{1}{2A}\left[-m + \frac{4\pi r_+}{A}\,(r_+^2 + a^2) \right]$$

$$= \frac{1}{2A}\left[-m + r_+ \right]$$

$$= \frac{r_+ - m}{8\pi(r_+^2 + a^2)}$$

Als Funktion von (m, a, q) ist dies gleich

$$T = \frac{1}{8\pi} \frac{r_+ - m}{r_+^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \frac{(m^2 - a^2 - q^2)^{1/2}}{2mr_+ - q^2}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \underbrace{\frac{(m^2 - a^2 - q^2)^{1/2}}{2m^2 - q^2 + 2m(m^2 - a^2 - q^2)^{1/2}}}_{\kappa}$$

Diese Größe κ nennt man die „Oberflächen-gravitation" des Schwarzen Lochs. (surface gravity). Sie wird üblicherweise mit κ (Kappa) bezeichnet und ist geometrisch definiert durch

$$\nabla_K K = \kappa K \big|_{r=r_+}$$

wobei $K = k_1 + \Omega_H k_2$

Sie entspricht (in geom. Einheiten) der Kraft/Masse die ein Beobachter aus dem räumlich Unendlichen aufwenden muß um einen Gegenstand an einem langen Seil gerade über $r = r_+$ schweben zu lassen.

$$\kappa = \lim_{r \to r_+} (g(K,K))^{1/2} \, [+ g(a,a)]^{1/2}$$

$$a = \nabla_u u, \; u = K / (g(K,K))^{1/2}.$$

Wir haben dann

$$dm = \frac{\partial m}{\partial A} dA + \frac{\partial m}{\partial l} dl + \frac{\partial m}{\partial q} dq$$

$$= \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H \, dl + \Phi \, dq$$

mit den gegebenen Interpretationen.

Dies ist zu vergleichen mit

$$dE = T\,dS + \text{Arbeitsterme } (-p\,dV + \mu_a\,dN_a)$$

und $dS \geq 0$ entspricht $dA \geq 0$
(Hawkingscher Oberflächensatz)

1974 zeigte S. Hawking, daß ein Schwarzes Loch in dessen Hintergrund Quantenfelder definiert sind, thermische Strahlung der Temperatur

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\hbar c}{k_B} \overset{a=0}{\underset{q=0}{=}} \frac{1}{8\pi M} \frac{\hbar c^3}{G k_B} \cong 6 \times 10^{-8} \left(\frac{M_\odot}{M}\right) \text{Kelv.}$$

abgibt (k_B = Boltzmann Konstante)

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} \approx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stefans Gesetz}}}{-} A T^4 \cong - M^2 \left(\frac{1}{M}\right)^4 = - \frac{1}{M^2}$$

(A: 2 konst.)

Strahldauer $\tau \sim 10^{71} (M/M_\odot)^3$ sec.

Aus dem 1. Hauptsatz folgt die Entropie dann zu $\left[\, dE = c^2 dM = \frac{c^4}{G} dm = \frac{c^4}{G} T\, dA_{H} \ldots = T_H\, dS_{H} \ldots \right]$

$$S_H = \frac{k_B c^3}{4 G \hbar} A_H(m, a, q) \, .$$

Für $q = a = 0$ also wegen

$$A_H(m, a=0, q=0) = 4\pi r_+^2 = 16\pi m^2$$

$$\Rightarrow \quad S_H = k_B \frac{c^3}{4 G \hbar} 16\pi \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2$$

$$= k_B \, 4\pi \, \frac{1}{c} \, G \, \frac{1}{\hbar} \, M^2$$

$$= 4\pi k_B \left(\frac{M}{M_P}\right)^2$$

wobei $M_P := \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} = 2{,}18 \cdot 10^{-8}$ kg $= 1{,}22 \cdot 10^{19}$ GeV/c^2

die Planck-Masse ist.

Beachte $M_\odot \cong 2 \cdot 10^{30}$ kg

$$\curvearrowright \quad \frac{M_\odot}{M_P} \cong 10^{38}$$

$$\Rightarrow \quad S_H = 4\pi k_B \cdot 10^{76} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2$$

$$\cong k_B \cdot 10^{77} \, (M / M_\odot)^2$$

Aus dem Hawking'schen Oberflächensatz folgt allgemein

$$dm = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H \, dl + \Phi \, dq$$

$$\geq \Omega_H \, dl + \Phi \, dq$$

Es war außerdem

$$\Omega_H = \frac{1}{m} \frac{4\pi l}{A} = \frac{a}{(r_+^2 + a^2)}$$

$$\Phi = \frac{q \, r_+}{r_+^2 + a^2}$$

Also

$$dm \geq \frac{a \, dl + r_+ \, q \, dq}{(r_+^2 + a^2)}$$

Mit $dl = d(ma) = m \, da + a \, dm$

$$dm - \frac{a^2}{(r_+^2 + a^2)} dm \geq \frac{m \, a \, da + r_+ q \, dq}{(r_+^2 + a^2)}$$

bzw $r_+^2 \, dm \geq m \, a \, da + r_+ \, q \, dq$

$$d\, m^2 \geq \left(\frac{m}{r_+}\right)^2 da^2 + \frac{m}{r_+} dq^2$$

Für extreme Parameterwerte

$$m = (a^2 + q^2)^{1/2}$$

ist $r_+ = m$

$$\Rightarrow \quad dm^2\big|_{ext} \geq da^2 + dq^2 = d(a^2+q^2)$$

Mit anderen Worten: Durch Prozesse mit $dA \geq 0$ kann aus einem extremen kein überextremes Schwarzes Loch werden.

Krümmung der Kerr-Newman-Metrik

$$g = \eta_{\mu\nu}\, \theta^\mu \otimes \theta^\nu = \theta^0 \otimes \theta^0 - \sum_{a=1}^{3} \theta^a \otimes \theta^a$$

$$\theta^0 = \frac{\Delta^{1/2}}{\varrho} \left[c\,dt - a \sin^2\theta \, d\varphi \right]$$

$$\theta^1 = \varrho / \Delta^{1/2} \, dr$$

$$\theta^2 = \varrho \, d\theta$$

$$\theta^3 = \frac{\sin\theta}{\varrho} \left[(r^2 + a^2)\, d\varphi - a\, c\,dt \right]$$

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

$\Rightarrow$

$$R_{0101} = -R_{2323} = -2 R_{0202} = -2 R_{0303}$$

$$= 2 R_{1212} = 2 R_{1313}$$

$$= 2 m r \frac{r^2 - 3a^2 \cos^2\theta}{\varrho^6}$$

$$R_{0123} = 2 R_{0213} = -2 R_{0312} =$$

$$= 2 m a \cos\theta \, \frac{3r^2 - a^2 \cos^2\theta}{\varrho^6}$$

$\Rightarrow$ Krümmungssingularität für $\varrho = 0$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 + a^2 \cos^2\theta = 0$$

$\Leftrightarrow$ $r = 0$ für $a = 0$, oder

$r = 0$ <u>und</u> $\theta = \pi/2$ für $a \neq 0$

entspricht <u>Ring</u> $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$