# 2. Vorlesung

Die Selbstenergie des Newtonschen Gravitationsfeldes; Testweise Modifikation der NF-

Wir verschieben die Massenbelegung

$$d\mu(\vec{x}) = \rho(\vec{x})\, dV(\vec{x}) \tag{2.1}$$

entlang des Vektorfeldes $\vec{\xi}(\vec{x})$ im $\mathbb{R}^3$.
um die Strecke $s\,\vec{\xi}(\vec{x})$ und nehmen die Ableitung bei $s=0$

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} d\mu(\vec{x} - s\,\vec{\xi}(\vec{x}))$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \rho(\vec{x} - s\,\vec{\xi}(\vec{x}))\, dV(\vec{x} - s\,\vec{\xi}(\vec{x}))$$

$$= -(\vec{\xi}\cdot\vec{\nabla})\,\rho(\vec{x})\, dV(\vec{x})$$

$$+ \rho(\vec{x})\, \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \underbrace{\left|\frac{\partial V(\vec{x} - s\,\vec{\xi}(\vec{x}))}{\partial V(\vec{x})}\right|}_{\underbrace{\det(\delta^a{}_b - s\nabla_b \xi^a)}_{1 - s\nabla_a \xi^a(\vec{x}) + O(s^2)}} dV(\vec{x})$$

$$= -\vec{\nabla}\cdot(\rho\,\vec{\xi})(\vec{x})\, dV(\vec{x}) \quad \Big(= -\underbrace{L_\xi}_{\text{Lie-Ableitung}}\, \rho\, dV\Big)$$

$$=: \delta\rho(\vec{x})\, dV(\vec{x}) \quad (\text{„Variation"})$$

$$\delta\rho = -\nabla(\vec{\xi}\rho). \tag{2.2}$$

Durch diese Verschiebung der Massenverteilung wird am System Arbeit geleistet

$$\delta A = -\int \vec{f} \cdot \vec{\xi} \, dV$$

Kraftdichte $= -\varrho \vec{\nabla} \phi$

$$= \int \varrho (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{\xi} \, dV$$

$$\overset{(*)}{=} -\int \phi \, \vec{\nabla} \cdot (\varrho \, \vec{\xi}) \, dV$$

$$\overset{(2.2)}{=} \int \phi \, \delta \varrho \, dV \qquad (2.3)$$

Dabei haben wir in (*) vorausgesetzt, dass kein Randterm

$$\int_{\partial G} \phi \, \varrho \, \vec{\xi} \cdot n \, dO$$

auftritt, was z.B. für $\varrho$ mit kompakten Träger sicher erfüllt ist.

Die Gleichung (2.3) gilt unabhängig von der Form der Feldgleichung, die $\varphi$ und $\varrho$ verknüpft.

Wir nehmen an, dass während des Verschiebungsprozesses die Newtonsche Feldgleichung

$$\Delta \varphi = 4\pi G \varrho$$

gilt. Also auch

$$\Delta \delta\varphi = 4\pi G \, \delta\varrho \qquad (2.4)$$

Eingesetzt in (2.3) folgt (für $\phi = \varphi$)

$$\begin{aligned} \delta A &= \int \varphi \, \delta\varrho \, dV \\ &= \frac{1}{4\pi G} \int \varphi \, \Delta \, \delta\varphi \\ &= -\frac{1}{4\pi G} \int (\vec{\nabla}\varphi) \cdot (\vec{\nabla} \delta\varphi) \\ &= \delta \left\{ -\frac{1}{8\pi G} \int \| \vec{\nabla} \varphi \|^2 \, dV \right\} \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Man nennt daher

$$\mathcal{E}_g := -\frac{1}{8\pi G} \| \vec{\nabla} \varphi \|^2 \qquad (2.6)$$

die Energiedichte des Gravitationsfeldes. Man vergleiche das mit dem Ausdruck

$$\mathcal{E}_e := \frac{\varepsilon_0}{2} \| \vec{\nabla} \varphi \|^2 \qquad (2.7)$$

für die Energiedichte des elektrostatischen Feldes $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Das negative Vorzeichen von (2.6) rührt daher, dass wegen der gravitativen Anziehung Arbeit gewonnen (negative Arbeit geleistet) wird wenn eine Materieverteilung aus dem Zustand „totaler Zerstreuung" ($\rho = 0$) aufgebaut wird.

Die gravitative Selbstenergie einer Kugelschale mit

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} -G\,\frac{M}{r} & r > R \\ -G\,\frac{M}{R} & r \leq R \end{cases} \qquad (2.8)$$

ist:

$$\vec{\nabla}\varphi = G\,\frac{M}{r^3}\,\vec{x}$$

$$\curvearrowright \|\vec{\nabla}\varphi\|^2 = G^2\,\frac{M^2}{r^4}$$

$$\mathcal{E}_g = \begin{cases} -\frac{1}{8\pi}\,G\,M^2/r^4 & \text{für } r \geq R \\ 0 & \text{für } r < R \end{cases}$$

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}_g\, d^3x = -\frac{G}{2}\,M^2 \int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= -\frac{GM^2}{2R} \qquad (2.9)$$

Dies ist genau die Energie, die man aufwenden muss um eine homogen belegte Massenschale durch allmähliches Hinzufügen kleiner Massen, die man aus dem Unendlichen nach $r = R$ herantransportiert, aufzubauen.

Hat man bereits eine homogen belegte Schale der Masse $M'$, so braucht man die Arbeit

$$dA = -G \frac{M'}{R} dM'$$

um eine infinitesimal kleine Zusatzmasse $dM'$ hinzuzufügen, also

$$A = -\int_0^M G \frac{M'}{R} dM' = -G \frac{M^2}{2R}. \qquad (2.10)$$

Da man dadurch Energie gewinnt, ist $A$ negativ. Genau diese geleistete Arbeit findet sich als im Feld gespeicherte Energie wieder, wie (2.9) zeigt (klar!, so wurde (2.6) ja abgeleitet).

Für $R = R_s = \frac{2GM}{c^2}$ ist

$$E = -\frac{1}{4} M c^2$$

$\Rightarrow$ „Schwarze Löcher" im Sinne von $v_\infty = c$ haben eine gravitative Bindungsenergie vergleichbar mit $Mc^2$ = Ruheenergie.