3. Vorlesung

Modifikation der Newtonschen Feldgleichungen, so dass auch Bindungsenergie gemäß $E = mc^2$ graviert.

Addierte Prinzipien

1.) $E = mc^2$

2.) Die Selbstenergie des Gravitationsfeldes ist auch Quelle desselben.

1.) Versuch: Addiere

$$\rho_g := \frac{1}{c^2} \varepsilon_g \quad \text{zu } \rho$$

$$\rightsquigarrow \quad \Delta \varphi = 4\pi G \, (\rho_m + \rho_g) \quad , \quad \rho_m = \rho$$

$$\rightsquigarrow \quad \Delta \varphi + \frac{1}{2c^2} \| \vec{\nabla} \varphi \|^2 = 4\pi G \rho \qquad (3.1)$$

Äquivalent zu

$$\Delta \psi = \frac{2\pi G}{c^2} \rho \psi \qquad (3.2)$$

mit $\psi := c^2 \exp(\varphi / 2c^2)$

Beachte: $\varphi(r \to \infty) \to 0 \iff \psi(r \to \infty) \to 1 \cdot c^2$

Dies ist noch keine selbstkonsistente Modifikation, denn dass $\mathcal{E}_g = -\frac{1}{8\pi G}\|\vec{\nabla}\varphi\|^2$ wurde unter der Annahme $\Delta\varphi = 4\pi G\varrho$ abgeleitet. Letztere ist aber nun modifizieren.

Wir suchen eine Gleichung für das G-Feld, deren Quellterm die von ihr selbst vorausgesagte Energiedichte / c^2 des G-Feldes enthält.

Im Folgenden muss man die „Masse" M = „gravitierende Masse" von der Materiemenge $M_m = \int \varrho \, dV$ unterscheiden.

Die gravitierende Masse kann man durch den Fluß des G-Feldes nach ∞ definieren

$$M = \frac{1}{4\pi G} \lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{S^2(R)} (\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\varphi)\, dO \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\varphi \, dV . \qquad (3.3)$$

Bei Newton $M = M_m$. Selbstkonsistenz heißt, dass

$$\delta A = c^2 \, \delta M = \frac{c^2}{4\pi G} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\delta\varphi \, dV \qquad (3.4)$$

In Newtonscher Theorie ist dies klar verletzt, da dort $\delta M = \delta M_m = 0$ (ρ_m wird nur umverteilt) aber rechte Seite von (3.4) $\neq 0$.

In modifizierter Theorie des 1. Versuchs gilt

$$\delta M = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \delta \varphi \, dV \qquad (3.5)$$

mit

$$\Delta \delta \varphi = 4\pi G \, \delta \rho - \frac{1}{c^2} (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \delta \varphi) \qquad (3.6)$$

Also gilt dort

$$\delta M = \int \delta \rho \, dV - \frac{1}{4\pi G c^2} \int (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \delta \varphi) \, dV$$

$$= \int \delta \rho \, dV + \underbrace{\frac{1}{4\pi G c^2} \int \varphi \, \Delta \delta \varphi \, dV}_{\gamma}$$

$$\gamma \overset{(3.6)}{=} \frac{1}{c^2} \int \varphi \, \delta \rho \, dV - \frac{1}{4\pi G c^4} \int \underbrace{\varphi (\vec{\nabla} \varphi)}_{\frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi^2} \cdot (\vec{\nabla} \delta \varphi)$$

$$= \frac{1}{c^2} \int \varphi \, \delta \rho \, dV + \frac{1}{8\pi G c^4} \int \varphi^2 (\Delta \delta \varphi) \, dV$$

$$\overset{(3.6)}{=} \int \left[\frac{\varphi}{c^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{c^2}\right)^2 \right] \delta\rho \, dV$$

$$- \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{2c^6} \int \underbrace{\varphi^2 (\vec{\nabla}\varphi)}_{\frac{1}{3}\vec{\nabla}\varphi^3} (\vec{\nabla}\delta\varphi) \, dV$$

$$= \int \left[\frac{\varphi}{c^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{c^2}\right)^2 \right] \delta\rho \, dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{3!\,c^6} \int \varphi^3 \, \Delta\delta\varphi \, dV$$

$$\vdots$$

$$= \int \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\varphi}{c^2}\right)^k \delta\rho \, dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{n!\,c^{2n}} \int \varphi^n \, \Delta\delta\varphi \, dV$$

$$\Rightarrow \delta M = \int \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\varphi}{c^2}\right)^k \delta\rho \, dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{n!\,c^{2n}} \int \varphi^n \, \Delta\delta\varphi \, dV \qquad (3.7)$$

Für beschränktes ϱ existiert $K \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\left| \varphi(\vec{x}) / c^2 \right| < K \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}$$

$$\leadsto \int \left(\frac{\varphi(x)}{c^2} \right)^n \Delta \delta\varphi \, dV$$

$$< K^n \int \Delta \delta\varphi \, dV = K^n \, 4\pi G \, \delta M .$$

$\Rightarrow$ Restterm $\leq \frac{1}{n!} K^n \delta M \to 0$ für $n \to \infty$.

$\Rightarrow$ Lemma:

$$\delta M = \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\varphi}{c^2} \right)^k \delta\varrho \, dV$$

$$= \int \exp(\varphi / c^2) \, \delta\varrho \, dV \qquad (3.8)$$

Selbstkonsistenz verlangt nun, dass

$$c^2 \delta M = \delta A = \int \phi \, \delta\varrho \, dV \qquad (3.9)$$

wobei ϕ dasjenige Potential ist, dessen Gradient die Kraft pro Materiemengen-Einheit ist

$$\vec{f} = - \varrho \nabla \phi . \qquad (3.10)$$

Mit $\phi = \varphi$ (1. Versuch) herrscht also keine Konsistenz, wohl aber mit

$$\phi = c^2 \exp(\varphi / c^2). \tag{3.11}$$

Denn wegen

$$\left.\begin{aligned} &\|\vec{\nabla}\varphi(r\to\infty)\| \sim \frac{1}{r^2} \\ \Rightarrow\ &\|\vec{\nabla}\phi(r\to\infty)\| \sim \frac{1}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad (3.12)$$

Ist

$$M = \frac{1}{4\pi G} \lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{S^2(R)} (\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\varphi)\, do \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi G} \lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{S^2(R)} (\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi)\, do \right\} \tag{3.13}$$

(d.h. gleicher Ausdruck), so dass wir das vorhergehende Argument auffassen können als ein Argument für ϕ, wenn ϕ der Differentialgleichung genügt, die aus (3.1) entsteht wenn man gemäß (3.11) φ durch ϕ ersetzt.

$$\varphi = c^2 \ln(\phi / c^2)$$

$$\vec{\nabla}\varphi = c^2\, \vec{\nabla}\phi / \phi$$

$$\Delta\varphi = c^2\, \Delta\phi/\phi - c^2 \|\vec{\nabla}\phi\|^2 / \phi^2$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi + \frac{1}{2c^2}\|\vec{\nabla}\varphi\|^2 = 4\pi G\varrho$$

$$\Leftrightarrow c^2\,\Delta\phi/\phi - c^2\,\|\vec{\nabla}\phi\|^2/\phi^2 + \frac{c^2}{2}\|\vec{\nabla}\phi\|^2/\phi^2$$

$$= 4\pi G\varrho$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta\phi = \frac{4\pi G}{c^2}\left[\varrho\,\phi + \frac{c^2}{8\pi G}\|\nabla\phi\|^2/\phi\right] \quad (3.14)}$$

2. Versuch

Wieder kann diese Gleichung linearisiert werden durch

$$\left.\begin{aligned} \psi &:= c^2\exp(\varphi/2c^2) = c^2(\phi/c^2)^{1/2} \\ &= c\sqrt{\phi} \\ \text{bzw}\quad \phi &= \psi^2/c^2 \end{aligned}\right\} (3.15)$$

was nach Vorherigem [(3.1) u. (3.2)] klar ist; trotzdem explizit

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{2}{c^2}\psi\,\vec{\nabla}\psi$$

$$\Delta\phi = \frac{2}{c^2}\|\nabla\psi\|^2 + \frac{2}{c^2}\psi\,\Delta\psi$$

$\Rightarrow$ (3.14) ist äquivalent zu

$$\frac{2}{c^2}\,\psi\,\Delta\psi + \cancel{\frac{2}{c^2}\,\|\vec{\nabla}\psi\|^2}$$

$$= \frac{4\pi G}{c^2}\,\varrho\,\psi^2/c^2 + \frac{1}{2}\,\frac{4}{c^4}\,\psi^2\,\cancel{\|\vec{\nabla}\psi\|^2}\,\frac{c^2}{\psi^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \underline{\underline{\Delta\psi = \frac{2\pi G}{c^2}\,\varrho\,\psi}} \qquad (3.16)$$

[Vgl. mit zeitunabhängiger Schrödinger-Gleichung zu $E=0$ und Potential $\sim\varrho$]

Wir können nun umgekehrt nachweisen, dass (3.14), also unser 2. Versuch, die genannte Selbstkonsistenzforderung erfüllt. Nach (2.3) gilt ja allgemein für das ϕ-Potential, dessen negativer Gradient $\times\,\varrho$ die Kraftdichte angibt:

$$\delta A = \int \phi\,\delta\varrho\,dV \qquad (2.3')$$

Statt ϕ und (3.14) nehmen wir ψ und (3.16) und ersetzen in (2.3') ϱ durch $\frac{c^2}{2\pi G}\,\Delta\psi/\psi$:

$$\delta A = \frac{1}{2\pi G}\int \psi^2\,\delta\left(\frac{\Delta\psi}{\psi}\right)\,dV \qquad (3.17)$$

$$= \frac{1}{2\pi G} \int (\psi \, \delta \Delta \psi - \Delta\psi \, \delta\psi) \, dV$$

$$= \frac{1}{2\pi G} \int_{S^2(R\to\infty)} \vec{n} \cdot (\psi \vec{\nabla} \delta\psi - \delta\psi \vec{\nabla}\psi) \, dO$$

Wegen $\psi(r\to\infty) = c^2 + \frac{b}{r} + O(\frac{1}{r^2})$

$\Rightarrow |\delta\psi(r\to\infty)| \sim \frac{1}{r}$

$\| \vec{\nabla}\psi(r\to\infty) \| \sim \frac{1}{r^2}$

trägt 2. Term im Integral nicht bei; wir dürfen deshalb sein Vorzeichen umkehren und erhalten

$$\delta A = \frac{1}{2\pi G} \, \delta \int_{S^2(R\to\infty)} \psi \, \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \, dO$$

$$= \frac{c^2}{4\pi G} \, \delta \int_{S^2(R\to\infty)} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi \, dO$$

(da $\psi^2 = c^2 \phi$)

$$= c^2 \, \delta M \qquad \square$$

Denn die Gesamtmasse die durch den Fluß von $\vec{\nabla}\phi$ ins unendliche gemessen wird ist $\int (\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{n} \, dO / 4\pi G$.

Theorem. Sei ϕ das Gravitations-potential, und ρ die Materiedichte (Baryonendichte), so dass

$$\vec{f} = -\rho \vec{\nabla} \phi$$

die Kraftdichte pro Materieelement Baryon) ist. ϕ genüge der Gleichung (3.14) mit Randbedingung $\phi(r \to \infty) = c^2$. Ferner sei die (gravitative) Gesamtmasse definiert durch

$$M := \lim_{R \to \infty} \frac{1}{4\pi G} \int_{S^2(R)} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi \; dO$$

Dann gilt $\delta A = c^2 \, \delta M$. $\square$

Sphärisch symmetrische Lösungen

Sei

$$\rho = \begin{cases} 3Mm / 4\pi R^3 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Mit $\psi = \psi(r)$ und $\Delta \psi = \psi'' + \frac{2}{r}\psi' = \frac{1}{r}(r\psi)''$

$$\frac{1}{r}(r\psi)'' = \begin{cases} \frac{2\pi G}{c^2} \frac{3Mm}{4\pi R^3} \psi & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

bzw

$$\chi'' = \begin{cases} \omega^2 \chi & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

mit $\chi := r\psi$

$$\omega := \left[\frac{3}{4}\,\frac{2GMm}{c^2 R}\right]^{1/2} \frac{1}{R}$$

Also

$$\chi = \begin{cases} A \sinh(\omega r) + B\cosh(\omega r) & r \leq R \\ C + Dr & r > R \end{cases}$$

Da $\psi = \frac{\chi}{r}$ bei $r = 0$ regulär ist muss $B = 0$ sein. Somit

$$\frac{\psi^2(r)}{c^2} = \begin{cases} K \sinh(\omega r)/r & \text{für } r \leq R \\ a + \frac{b}{r} & \text{für } r > R \end{cases}$$

(hier $K = A/c^2$, $a = D/c^2$, $b = C/c^2$)

Randbedingungen für $r \to \infty$:

$$\varphi(r \to \infty) = -G\frac{M}{r} + O\left(\tfrac{1}{r^2}\right)$$

$$\phi(r \to \infty) = c^2 \exp(\varphi/c^2) = c^2 - G\frac{M}{r} + O\left(\tfrac{1}{r^2}\right)$$

$$\psi(r \to \infty) = c^2 \exp(\varphi/2c^2) = c^2 - G\frac{M}{2r} + O\left(\tfrac{1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a = 1, \quad b = -\frac{GM}{2c^2}$$

Wir fordern, dass φ bei $r = R$ stetig differenzierbar ist (die Kraft ist stetig).

$$\varphi(r \searrow R) = \varphi(r \nearrow R)$$
$$\varphi'(r \searrow R) = \varphi'(r \nearrow R)$$

$$1 + \frac{b}{R} = K \frac{\sinh(\omega R)}{R}$$
$$-\frac{b}{R^2} = K \left[\frac{\omega \cosh(\omega R)}{R} - \frac{\sinh(\omega R)}{R^2} \right]$$

Dividiert man die 2. durch die 1. Gleichung

$$-\frac{b/R^2}{1 + \frac{b}{R}} = \omega \coth(\omega R) - \frac{1}{R}$$

so kann man dies nach b auflösen

$$-b/R^2 = (\cdot\cdot) + \frac{b}{R}(\cdot\cdot)$$
$$-b\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R}(\cdot\cdot)\right) = (\cdot\cdot)$$
$$-b = \frac{R(\cdot\cdot)}{\frac{1}{R} + (\cdot\cdot)} = \frac{R\omega \coth(\omega R) - 1}{\omega \coth(\omega R)}$$
$$= R - \frac{\tanh(\omega R)}{\omega}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{GM}{2c^2 R} = 1 - \frac{\tanh(\omega R)}{\omega R}$$

Eingesetzt in die 1. Gleichung ergibt K:

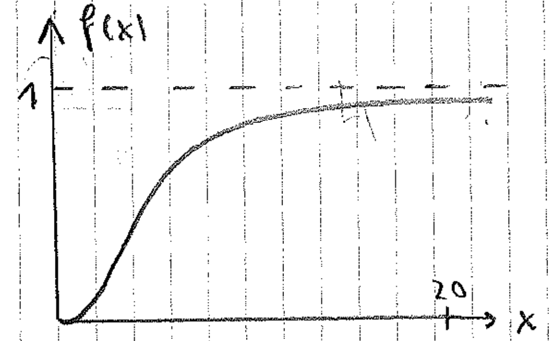
$$K = \underbrace{\left(1 + \frac{b}{R}\right)}_{\tanh(wR)/wR} \frac{R}{\sinh(wR)}$$

$$= \frac{1}{w \cosh(wR)}$$

Damit sind alle Konstanten als Funktionen von R und Mm bestimmt. Es ist

$$wR = \left[\frac{3}{4} \frac{2GMm}{Rc^2}\right]^{1/2} =: X$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{2c^2R} = f(X) := \left(1 - \frac{\tanh X}{X}\right)$$



$$\Rightarrow M \leq \frac{2c^2}{G} R$$

$\Rightarrow$ Die gravitative Masse ist durch die Größe des Gebiets Supp(ϱ) nach oben beschränkt. Weiteres Erhöhen der Materiemenge Mm kann M nicht steigern, weil in der Quelle $\varrho\phi$, nicht ϱ steht (→ Rotverschiebung).