4. Vorlesung

Virialsatz; Speziell-relativistische Instabilitäten; Newton'sche Sterne

Wir betrachten n Punktteilchen die untereinander in Paaren Wechselwirken. Die Wechselwirkung wird also durch ein Potential

$$V : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R} \tag{4.1}$$

beschrieben, das folgende „faktorisierende" Form hat

$$V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \sum_{a=1}^{n} \sum_{b>a} V_{ab}(r_{ab})$$

mit $\vec{r}_{ab} := \vec{x}_a - \vec{x}_b$

$$r_{ab} := \| \vec{r}_{ab} \|$$

und $V_{ab} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{<0}$

$$V_{ab}(x) := -G \frac{m_a m_b}{x} = V_{ba}(x) \quad (4.$$

Im letzten Ausdruck haben wir uns speziell auf die Gravitative Anziehung festgelegt.

Deren 2-Körper-Potentiale V_{ab} sind homogene Funktionen vom Grade $g = -1$:

Allgemein

$$V_{ab}(\lambda x) = \lambda^g V_{ab}(x)$$

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} \quad \Rightarrow$$

$$x\, V'_{ab}(x) = g\, V_{ab}(x)$$

(hier $g = -1$)

Die Kraft auf das a-te Teilchen ist

$$\vec{F}_a = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a} = -\sum_{b>a} V'_{ab}(r_{ab}) \frac{\partial r_{ab}}{\partial \vec{x}_a}$$

$$-\sum_{b<a} V'_{ba}(r_{ba}) \frac{\partial r_{ba}}{\partial \vec{x}_a}$$

$$= -\sum_{b>a} V'_{ab}(r_{ab}) \frac{\vec{r}_{ab}}{r_{ab}}$$

$$-\sum_{b<a} V'_{ba}(r_{ba}) \underbrace{\left(-\frac{\vec{r}_{ba}}{r_{ba}}\right)}_{+\vec{r}_{ab}/r_{ab}}$$

$$= -\sum_{b\neq a} V'_{ab}(r_{ab}) \left(\vec{r}_{ab} / r_{ab}\right)$$

$$\curvearrowright \quad \vec{F}_a = \sum_{\substack{b=1 \\ \neq a}}^{n} \vec{F}_{ab}$$

$$\vec{F}_{ab} = - V'_{ab}(r_{ab}) \frac{\vec{r}_{ab}}{r_{ab}}$$

$$= - \vec{F}_{ba}$$

„actio = reactio"

Das Virial des n-Punkte-Systems ist

$$G = \sum_{a=1}^{n} \vec{p}_a \cdot \vec{x}_a \qquad (4.2)$$

mit $\vec{p}_a$ = Impuls des a-ten Teilchens.

$$\curvearrowright \quad \dot{G} = \frac{d}{dt} G = \sum_{a=1}^{n} \left(\dot{\vec{p}}_a \cdot \vec{x}_a + \vec{p}_a \cdot \vec{v}_a \right)$$

$$= \sum \left(\vec{F}_a \cdot \vec{x}_a + \vec{p}_a \cdot \vec{v}_a \right)$$

wegen $\dot{\vec{p}}_a = \vec{F}_a$

(gilt auch in SRT; dort ist aber
$\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a / (1 - \vec{v}_a^{\,2}/c^2)^{1/2}$)

Wir berechnen die 1. Summe

$$\sum_{a=1}^{n} \vec{F}_a \cdot \vec{x}_a = \sum_a \sum_{b>a} \vec{F}_{ab} \cdot \vec{x}_a$$

$$+ \sum_a \sum_{b<a} \vec{F}_{ab} \cdot \vec{x}_a$$

Es ist

$$\sum_a \sum_{b<a} \vec{F}_{ab} \cdot \vec{x}_a$$

$$= \sum_b \sum_{a<b} \vec{F}_{ba} \cdot \vec{x}_b \quad (a \leftrightarrow b \text{ umbenannt})$$

$$= - \sum_b \sum_{a<b} F_{ab} \cdot \vec{x}_b \quad (\vec{F}_{ab} = - \vec{F}_{ba})$$

$$\overset{(*)}{=} - \sum_a \sum_{b>a} F_{ab} \cdot \vec{x}_b$$

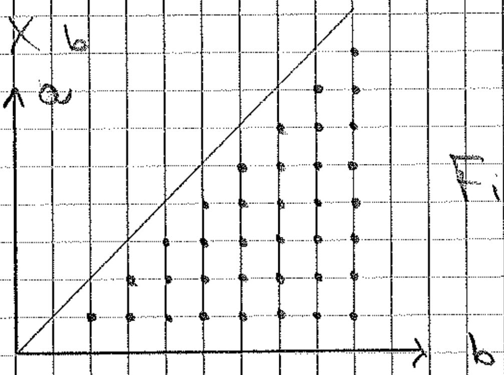


Fig. 1.

(*) Wegen

$$\sum_b \sum_{a<b} = \sum_a \sum_{b>a}$$

= Summe über die Gitterpunkte unterhalb der Diagonale in Fig. 1

$$\Rightarrow \sum_{a=1}^{n} \vec{F}_a \cdot \vec{x}_a = \sum_a \sum_{b>a} \vec{F}_{ab} \cdot \vec{x}_{ab}$$

Mit

$$F_{ab} = - V'_{ab} \frac{\vec{r}_{ab}}{r_{ab}} \quad \text{folgt}$$

$$\sum \vec{F}_a \cdot \vec{x}_a = - \sum_{a=1}^{n} \sum_{b>a} V'_{ab}(r_{ab}) \frac{r_{ab}^2}{r_{ab}}$$

$$= - \sum_{a=1}^{n} \sum_{b>a} V'_{ab}(r_{ab})\, r_{ab}$$

$$= - g \sum_{a=1}^{n} \sum_{b>a} V_{ab}(r_{ab})$$

[da V_{ab} homogen vom Grad g]

$$= - g V \tag{4.3}$$

Also gilt für die Zeitableitung des Virials

$$\dot{G} = - g V + \sum p_a \cdot \vec{v}_a$$

Sind alle $p_a(t)$ und $\vec{x}_a(t)$ beschränkte Funktionen von t, wie es für ein gebundenes System der Fall wäre, so ist

$$\langle \dot{G} \rangle_T = \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T dt\, \dot{G} \right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{G(T) - G(0)}{T} = 0$$

$$\curvearrowright \; - g \langle V \rangle_T + \left\langle \sum_{a=1}^{n} \vec{p}_a \cdot \vec{v}_a \right\rangle_T = 0 \tag{4.4}$$

wobei $\langle \cdots \rangle_T$ = Zeitmittel.

Im Newton'schen Fall („nicht-relativistisch")
ist

$$\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a \,, \quad E_a^{(kin)} = \tfrac{1}{2} m_a v_a^2$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{p}_a \cdot \vec{v}_a = m_a v_a^2 = 2 E_a^{(kin)}$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{v}_a \right\rangle_T = 2 \left\langle E^{(kin)} \right\rangle_T \qquad (4.5)$$

In der SRT ist

$$\vec{p}_a = m_a \gamma_a \vec{v}_a \,,$$

$$E_a^{(kin)} = m_a c^2 (\gamma_a - 1)$$

wo $\gamma_a := \left[1 - v_a^2 / c^2 \right]^{-1/2}$

$$\rightsquigarrow \quad v_a^2 / c^2 = 1 - \gamma_a^{-2}$$

$$\vec{p}_a \cdot \vec{v}_a = m_a \gamma_a v_a^2 = m_a c^2 \gamma_a (1 - \gamma_a^{-2})$$

$$= m_a c^2 (\gamma_a - \gamma_a^{-1})$$

[mit $\gamma_a = 1 + E_a^{kin} / m_a c^2$]

$$\vec{p}_a \vec{v}_a = m_a c^2 + E_a^{(kin)} - \frac{m_a c^2}{1 + (E_a^{kin} / m_a c^2)}$$

$$= E_a^{(kin)} + m_a c^2 \left[\frac{E_a^{(kin)} / m_a c^2}{1 + (E_a^{(kin)} / m_a c^2)} \right]$$

Also

$$\vec{p}_a \cdot \vec{v}_a = \begin{cases} 2E_a^{(kin)} & \text{für } \frac{E_a^{(kin)}}{m_a c^2} \ll 1 \\ E^{kin} & \text{für } \frac{E_a^{(kin)}}{m_a c^2} \gg 1 \\ \text{(Ultrarelativistischer Grenzfall)} & \end{cases} \tag{4.6}$$

Also gilt

$$-g \langle V \rangle_T + 2 \langle E_{kin} \rangle_T = 0 \tag{4.7a}$$

Newtonisch

$$-g \langle V \rangle_T + \langle E_{kin} \rangle_T = 0 \tag{4.7b}$$

ultrarelativistisch.

Außerdem gilt ja

$$E = E^{kin} + V = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \quad E = \langle E \rangle_T = \langle E_{kin} \rangle_T + \langle V \rangle_T$$

Also

$$E = \begin{cases} \left(1 + \frac{2}{g}\right) \langle E_{kin} \rangle_T = \left(1 + \frac{g}{2}\right) \langle V \rangle_T & \text{nicht rel.} \\ \left(1 + \frac{1}{g}\right) \langle E_{kin} \rangle_T = (1 + g) \langle V \rangle_T & \text{ultra rel.} \end{cases} \tag{4.8}$$

Für $g=-1$ folgt somit im Newtonschen Fall

$$E = -\langle E_{kin}\rangle_T = \frac{1}{2}\langle V\rangle_T < 0 \qquad (4.9)$$

während im ultrarelativistischen Fall gilt

$$E \overset{!}{=} 0 \qquad (4.10)$$

Hier hat man also nur marginal gebundene Gleichgewichtszustände.

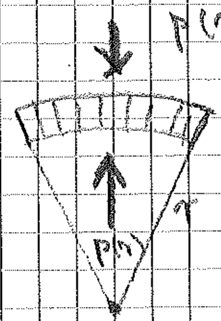
Newtonsche Sterne.

Sphärisch symmetrische Massenverteilung $\rho(r)$. Masse innerhalb Radius r

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \qquad (4.11)$$

$$\curvearrowright \quad M'(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \qquad (4.12)$$

Gleichgewichtsbedingung: Sei $p(r)$ der Druck im Inneren des Sterns im Abstand r vom Zentrum. Auf das Massenelement $\rho(r)\, dr\; r\,d\theta\; r\sin\theta\, d\varphi$ wirkt von „oben" die Kraft $-p(r+dr)\, r\,d\theta\; r\sin\theta\, d\varphi\; \vec{e}_r$, von unten $p(r)\, r\,d\theta\; r\sin\theta\, d\varphi\; \vec{e}_r$.



Die Summe der angreifenden Druckkräfte ist also

$$\vec{F}_p = -\left(p(r+dr) - p(r)\right)\vec{e}_r \; r\,d\theta \; r\sin\theta\, d\varphi$$

Die auf das Massenelement wirkende Gravitationskraft ist

$$-G\,\frac{\rho(r)}{r^2}\,M(r)\,dr\;\vec{e}_r\;r\,d\theta\;r\sin\theta\,d\varphi$$
$$= \vec{F}_g .$$

Im Gleichgewicht muss die Summe aller angreifenden Kräfte verschwinden

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -p'(r) = G\,\frac{\rho(r)\,M(r)}{r^2} \qquad (4.13)$$

(4.12-13) bilden zwei Differentialgleichungen für die 3 Funktionen $\rho(r)$, $p(r)$ und $M(r)$. Für ein determinierendes System brauchen wir noch die Zustandsgleichung

$$p = p(\rho). \qquad (4.14)$$

Für endliches $\rho(r\to 0)$ ist $\rho(r)M(r)\big|_{r\to 0} \sim r^3$, also $\rho(r)M(r)/r^2\big|_{r\to 0} \sim r \to 0$ und somit nach (4.13)

$$p'(0) = 0 \tag{4.15}$$

und wegen (4.14)

$$\frac{dp}{d\rho}\,\rho'(r=0) = 0$$

$$\Rightarrow \rho'(0) = 0 \quad (\text{falls } \rho(0) < \infty) \tag{4.16}$$

[wobei wir $dp/d\rho\,(\rho(0)) \neq 0$ voraussetzen; da $dp/d\rho = v^2_{schall}$ ist dies physikalisch klar].

Nochmals Virialsatz: Anhand von (4.13) können wir für diesen Spezialfall nochmals den Virialsatz ableiten. Multiplikation beider Seiten mit $4\pi r^3$ und Integration $\int_0^R dr$, wobei R der Radius des Sterns ist, liefert auf der linken Seite

$$-4\pi \int_0^R p'\, r^3\, dr$$

$$= \underbrace{-4\pi\, p(r)\, r^3\Big|_0^R}_{\substack{=0 \text{ da } p(R)=0 \text{ (Def. von R)} \\ \text{und } p(0)<\infty}} + 3\cdot 4\pi \int p\, r^2\, dr$$

$$= 3 \int_0^R 4\pi\, p(r)\, r^2\, dr = 3 \langle p \rangle_V \, Vol$$

wobei $\langle p \rangle_V$ das Volumenmittel des Druckes ist.

Die rechte Seite wird

$$G \int_0^R \frac{M(r)\, \varrho(r)}{r^2}\, 4\pi r^3\, dr$$

$$= G \int_{\mathbb{R}^3} \frac{M(r)\, \varrho(r)}{r}\, d^3x$$

$$= G \int \frac{M(r)\, d\mu(r)}{r}$$

mit $\varrho(r)\, d^3x = d\mu(r)$

$$= - E_{grav}$$

Also

$$Vol \langle P \rangle_V = - \frac{1}{3} E_{grav} \qquad (4.17)$$

Vgl. mit

$$\langle V \rangle_T = \begin{cases} -2 \langle E_{kin} \rangle_T & NR \\ - \langle E_{kin} \rangle_T & UR \end{cases}$$

liefert wegen $\langle V \rangle = \langle E_{grav} \rangle$

$$Vol \langle P \rangle_V = \begin{cases} \frac{2}{3} \langle E_{kin} \rangle_T & \text{nicht rel} \\ \frac{1}{3} \langle E_{kin} \rangle_T & \text{ultra rel.} \end{cases} \qquad (4.18)$$

Nimmt man an, dass die Entropie pro erhaltener Teilchenzahl (Baryon) konstant ist, so hat man die <u>polytrope Zustandsgleichung</u>:

$$p = K \varrho^{\gamma} \tag{4.19}$$

$\gamma = 1 + \frac{1}{n}$, n = Polytropenindex.

$p' = K \gamma \varrho^{\gamma-1} \varrho'$ in (4.13)

$$\Rightarrow \quad - K \gamma \varrho^{\gamma-1} \varrho' = G \frac{M \varrho}{r^2}$$

Daraus wollen wir eine DGL für ϱ ableiten, indem wir rechts nach M auflösen und nochmals differenzieren und (4.12) benutzen

$$- K \gamma \varrho^{\gamma-2} \varrho' \frac{r^2}{G} = M$$

$$\Leftrightarrow \quad - \frac{K \gamma r^2}{G(\gamma-1)} (\varrho^{\gamma-1})' = M$$

$$\curvearrowright \quad - \frac{K \gamma}{G(\gamma-1)} \left[r^2 (\varrho^{\gamma-1})' \right]' = 4\pi r^2 \varrho$$

$$\Leftrightarrow \quad - \frac{K \gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \frac{1}{r^2} \left[r^2 (\varrho^{\gamma-1})' \right]' = \varrho \tag{4.20}$$

Dabei haben wir $\gamma \neq 1$ vorausgesetzt.

Für $\gamma = 1$ bekommen wir stattdessen:

$$-\frac{K}{4\pi G}\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\varrho'}{\varrho}\right)' = \varrho \qquad (4.21)$$

Im Falle $\gamma \neq 1$ setzen wir

$$\Theta(r) := \left[\varrho(r)/\varrho(0)\right]^{\gamma-1} \qquad (4.22a)$$

$$\xi := \left[\frac{4\pi G(\gamma-1)}{K\gamma}\right]^{1/2}\left[\varrho(0)\right]^{\frac{2-\gamma}{2}} r \qquad (4.22b)$$

dann

$$-\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}\varrho^{\gamma-1}\right] = \varrho$$

$$\Leftrightarrow -\frac{K\gamma\,\varrho(0)^{\gamma-2}}{4\pi G(\gamma-1)}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\frac{d}{d\xi}\Theta\right] + \Theta^n = 0 \qquad (4.23)$$

$$n = \frac{1}{\gamma-1}$$

Lane-Emden Gleichung

Es gilt

$$\Theta'(r=0) = (\varrho(0))^{1-\gamma}(\gamma-1)\,\varrho^{\gamma-2}(0)\,\varrho'(0)$$

$$= (\gamma-1)\,\varrho'(0)/\varrho(0)$$

Also müssen Lösungen für $\gamma \neq 1$, die $\varrho(0) < \infty$ genügen, die Randbedingung

$$\Theta(0) = 1 \tag{4.24a}$$

$$\Theta'(0) = 0 \tag{4.24b}$$

erfüllen. [Die erste folgt aus $\Theta := \varrho/\varrho_0$, $\varrho_0 = \varrho(0)$, die zweite aus $\varrho' = \vec{x}\cdot\vec{\nabla}\varrho \big|_{\vec{x}=0} = 0$ falls $\varrho \in C^1$].

Sterne mit endlichem Radius $R < \infty$ sind möglich, sofern p – und damit auch ϱ bzw Θ – eine Nullstelle besitzt.

Satz: Lösungen der Lane-Emden-Gleichung besitzen eine Nullstelle genau dann wenn $\gamma > 6/5$, d.h. $n < 5$

Im Folgenden bezeichnen wir mit ξ_1 die erste (kleinste) Nullstelle – falls existent. Der Radius R des Sterns folgt dann aus (4.22b)

$$R = \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{1/2} \left[\varrho(0)\right]^{\frac{\gamma-2}{2}} \xi_1 \tag{4.25a}$$

bzw
$$\varrho(0) = \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi_1^{\frac{2}{2-\gamma}} R^{\frac{2}{\gamma-2}} \tag{4.25b}$$

Beachte: Für $\gamma = 4/3$ ist M von $\rho(0)$ unabhängig!

Die Masse des Sterns folgt aus

$$M = \int_0^R 4\pi \rho(r)\, r^2\, dr$$

$$= \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{3/2} \rho_0^{\frac{\gamma-2}{2}\cdot 3}\, \rho_0\, 4\pi \int_0^{\xi_1} \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}} \xi^2\, d\xi$$

$$= 4\pi \left[\rho(0)\right]^{\frac{1}{2}(3\gamma-4)} \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{3/2} \int_0^{\xi_1} \Theta^n \xi^2\, d\xi$$

Wegen $-\Theta^n = \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 \frac{d}{d\xi}\Theta\right]$ ist das Integral gleich $-\xi_1^2\, \Theta'(\xi_1)$; also

$$M = 4\pi \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{3/2} \left[\rho(0)\right]^{\frac{1}{2}(3\gamma-4)} \xi_1^2\, |\Theta'(\xi_1)| \tag{4.26}$$

Wegen $\Theta'(\xi_1) < 0$ (klar!) ist $-\Theta'(\xi_1) = |\Theta'(\xi_1)|$. In dieser Gleichung kann man die Unbekannte $\rho(0)$ gemäß der Gleichung (4.25b) eliminieren

$$M = 4\pi \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{\frac{3}{2}+\frac{3\gamma-4}{4-2\gamma}} \xi_1^{2+\frac{3\gamma-4}{2-\gamma}}\, R^{\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}}\, |\Theta'(\xi_1)|^2$$

$$= 4\pi \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{2-\gamma}} \xi_1^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}\, |\Theta'(\xi_1)|\, R^{\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}} \tag{4.27a}$$

(Masse-Radius-Relation)

Oder mit $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$

$$M = 4\pi \left[\frac{K(n+1)}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} \xi_1^{\frac{n+1}{n-1}} \left| \Theta_1'(\xi_1) \right| R^{\frac{n-3}{n-1}} \tag{4.27b}$$

Die Potenz $(n-3)/(n-1)$ von R ist positiv $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} & n > 3 \text{ und } n > 1 \\ \text{oder } & n < 3 \text{ und } n < 1 \end{aligned} \tag{4.28a}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad & n > 3 \text{ oder } n < 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \gamma < \tfrac{4}{3} \text{ oder } \gamma > 2 \end{aligned} \tag{4.28b}$$

Für den physikalisch interessanten Fall $5/3 \geq \gamma > 4/3$ ist die Potenz negativ. Das heisst, daß Sterne mit polytroper Zustandsgleichung und Polytropenindex in diesem Wertebereich um so kleiner sind, je schwerer sie sind. Das trifft für <u>entartete Sterne</u> zu

Die gravitative Selbstenergie eines Sterns mit polytroper Zustandsgleichung kann wie folgt berechnet werden:

In (4.17) hatten wir bereits gesehen, dass

$$E_{grav} = -3 \langle p \rangle_V \, Vol$$

Also

$$E_{grav} = -12\pi \int_0^R p(r)\, r^2 \, dr$$

$$= -12\pi \int_0^R \left(\frac{p}{\varrho}\right) \varrho \, r^2 \, dr$$

$$\overset{(4.12)}{=} -3 \int_0^R \left(\frac{p}{\varrho}\right) M'(r) \, dr$$

$$= 3 \int_0^R \left(\frac{p}{\varrho}\right)' M(r) \, dr$$

$$= 3 \, \frac{\gamma - 1}{\gamma} \int_0^R \frac{p'}{\varrho} M(r) \, dr$$

[wegen $p = K \varrho^{\gamma - 1} \Rightarrow (p/\varrho)' = \frac{\gamma-1}{\gamma} p'/\varrho$]

$$\overset{(4.13)}{=} -3 \, \frac{\gamma - 1}{\gamma} \, G \int_0^R \frac{M^2(r)}{r^2} \, dr$$

$$= 3 \, \frac{\gamma - 1}{\gamma} \, G \int_0^R \left(\frac{1}{r}\right)' M^2(r) \, dr$$

$$\overset{(4.12)}{=} 3 \, \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left\{ \frac{G M^2}{R} - 2 \int_0^R G \, \frac{M(r)}{r} \, 4\pi r^2 \varrho \, dr \right\}$$

$$\Rightarrow E_{grav} = 3\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\left\{\frac{GM^2}{R} + 2\,E_{grav}\right\}$$

$$\Leftrightarrow E_{grav} = -\frac{3(\gamma-1)}{5\gamma-6}\,\frac{GM^2}{R} \qquad (4.29)$$

Hier ist $M = M(R)$ und M hängt mit R über (4.27) zusammen.

Da

$$M \sim [\rho(0)]^{\frac{3\gamma-4}{2}} \qquad (4.30a)$$

$$R \sim [\rho(0)]^{\frac{\gamma-2}{2}} \qquad (4.30b)$$

ist

$$E_{grav} \sim [\rho(0)]^{\frac{5\gamma-6}{2}} \qquad (4.31)$$

Die thermische (= innere) Energie des Sterns ergibt sich so: Wir nehmen an, die Entropie bezogen auf die Masseneinheit sei konstant [Dies ist nur im Newtonschen Falle eine sinnvolle Annahme, da die Masse keine erhaltene Größe in der SRT oder ART ist; dort bezieht man alle Größen auf die – erhaltene – Baryonen oder Leptonenzahl.]. Dann gilt

$$d\,\mathcal{E}_m = -p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad \text{(1. Hauptsatz)} \qquad (4.32)$$

$\mathcal{E}_m$ = Innere Energie pro Masse, $\frac{1}{\rho}$ = Volumen pro M.

Mit $p = K \varrho^\gamma$ also

$$d\varepsilon_m = K \varrho^\gamma \varrho^{-2} \, d\varrho$$

$$\rightsquigarrow \quad \varepsilon_m = \frac{K}{\gamma - 1} \varrho^{\gamma - 1} \qquad (\gamma > 1, \ \varepsilon = 0 \text{ für } \varrho = 0)$$

$$\rightsquigarrow \quad \varepsilon_V = \varrho \, \varepsilon_m =$$

= Volumendichte der thermischen Energie

$$= \frac{K}{\gamma - 1} \varrho^\gamma = \frac{1}{\gamma - 1} p \qquad (4.32)$$

Also beträgt die gesamte thermische Energie

$$E_T = \int \varepsilon_V \, d^3x = \frac{1}{\gamma - 1} \langle p \rangle_V V$$

$$= - \frac{1}{3} \frac{1}{\gamma - 1} E_{grav}$$

$$= \frac{1}{5\gamma - 6} \frac{GM^2}{R} \qquad (4.33)$$

Die Gesamtenergie ist also

$$E_{tot} = E_T + E_{grav} = \left(1 - \frac{1}{3} \frac{1}{\gamma - 1}\right) E_{grav}$$

$$= \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} E_{grav}$$

$$= - \frac{3\gamma - 4}{5\gamma - 6} \frac{GM^2}{R} \qquad (4.34)$$

Im Falle polytroper Zustandsgleichungen ergibt sich also auch auf diesem Weg, dass gebundene stabile Zustände nur für $\gamma > 4/3$ existieren:

$$E_{tot} < 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\gamma - 4 > 0 \quad \text{und} \quad 5\gamma - 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma > 4/3 \quad \Leftrightarrow \quad n < 3$$

oder

$$3\gamma - 4 < 0 \quad \text{und} \quad 5\gamma - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma < 6/5 \quad \Leftrightarrow \quad n > 5$$

Θ hat keine Nullst. $\Rightarrow$ keine Sterne mit $R < \infty$

Um festzustellen, welche Stabilitätsbedingung für den physikalisch interessanten Fall $\gamma = 4/3$ gilt, sind genauere Variationsüberlegungen notwendig.

Theorem. Notwendig und hinreichend für Stabilität ist die Bedingung, dass E_{tot} unter allen Variationen von $\rho(r)$ und Festhaltung der Gesamtmasse M stationär ist.