

5. Vorlesung

Die Idee einer Grenzmasse für
entartete Sterne

Bringt man N Fermionen in einer Kugel vom
Radius R unter, so ist ihre Dichte

$$n \sim N/R^3 \quad (5.1)$$

und ihr gegenseitiger Abstand

$$d \sim n^{-1/3} \sim R/N^{1/3} \quad (5.2)$$

Nach der Unschärferelation hat jedes Teilchen
einen Mindestimpuls von

$$p \sim \hbar/d = \hbar n^{1/3}$$

entsprechend einer kinetischen Energie von

$$E_{kin} = \left(p^2 c^2 + m^2 c^4 \right)^{1/2} = \begin{cases} pc = \hbar c n^{1/3} & \text{u. } \pi \\ p^2/2m = \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3} & \text{h. } \pi \end{cases} \quad (5.3)$$

Die gravitative Bindungsenergie pro Teilchen ist

$$E_{grav} \sim - G \frac{Mm}{R} \quad (5.4)$$

$$M = Nm$$

Also, pro Teilchen, ist die Gesamtenergie

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

$$\sim \begin{cases} (hcN^{1/3} - GMm) \frac{1}{R} & \text{cl. (5.5a)} \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{N^{2/3}}{R^2} - \frac{GMm}{R} & \text{nr. (5.5b)} \end{cases}$$

N.R.



Als Funktion von R hat dies im nicht-relativistischen Fall ein Minimum bei

$$E(R) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{N^{2/3}}{R^2} - \frac{GMm}{R}$$

$$E'(R_*) = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{N^{2/3}}{R_*^3} + \frac{GMm^2}{R_*^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow R_* = \frac{1}{GMm^2} \frac{\hbar^2}{m} N^{2/3} \\ = \frac{\hbar^2}{Gm^3 N^{1/3}} \quad (5.6)$$

$$E(R_*) = \frac{\hbar^2}{2m} N^{2/3} \frac{G^2 m^6 N^{2/3}}{\hbar^4} - GMm^2 \frac{Gm^3 N^{1/3}}{\hbar^2} \\ = -\frac{1}{2} \frac{G^2}{\hbar^2} m^5 N^{4/3} = -\frac{1}{2} mc^2 \left(\frac{m}{m_{\text{Pl}}} N^{1/3} \right)^4 \quad (5.7)$$

$$m_{\text{Pl}} = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = \text{Planckmasse} = 10^{19} \text{ GeV}/c^2$$

Für diesen Wert von R_* gilt

$$d_* = R_* / N^{1/3} = \frac{\hbar^2}{Gm^3 N^{2/3}}$$

$$p \sim \hbar / d_* = \frac{Gm^3 N^{2/3}}{\hbar} = mc \left(\frac{m}{m_{\text{Pl}}} N^{1/3} \right)^2 \quad (5.8)$$

Damit $p \ll mc$ (n.r. Fall) muss

$$\frac{m}{m_p} N^{1/3} \ll 1$$

$$\text{bzw } m \ll \frac{m_p}{N^{1/3}}$$

$$\text{oder } N \ll \left(\frac{m_p}{m} \right)^3 \quad (5.9)$$

Ist $m = m_e = \text{Elektronenmasse} = 0.5 \text{ MeV}/c^2$
 $\Rightarrow (m_p/m_e)^3 \sim (10^{22})^3 = 10^{66}$, so dass

$$N m_e \ll 10^{66} \cdot 10^{-30} \text{ kg} \sim 10^{36} \text{ kg} \quad (5.10)$$

Ist $m = m_n = \text{Nucleonenmasse} = 1 \text{ GeV}/c^2$
 $\Rightarrow (m_p/m_n)^3 \sim (10^{19})^3 = 10^{57}$, so dass

$$N m_n \ll 10^{57} \cdot 10^{-27} \text{ kg} \sim 10^{30} \text{ kg} \quad (5.11)$$

U.R.

Im ultrarelativistischen Fall ist

$$E_{\text{tot}}(R) = hc \left(N^{1/3} - \frac{G N m^2}{hc} \right) \frac{1}{R}$$

$$= hc N \left[N^{-2/3} - \frac{G m^2}{hc} \right] \frac{1}{R} \quad (5.12)$$

Ist $[\dots] > 0$, so kann das System durch Aufblähen, d.h. größere R , Energie abgeben und somit zu kleineren Impulsen gelangen. Es läuft dann in den nicht-relativistischen Fall, in dem

Stabilität herstellt. Ist hingegen
 $[\dots] < 0$, so kann das System durch
 Zusammenziehen, d.h. kleinere R ,
 Energie abgeben. Der Ultra-relativistische
 Fall wird somit umso ausgeprägter und
 es kommt zum Kollaps $R \rightarrow 0$.

Stabilität erfordert also $[\dots] > 0$

$$\Leftrightarrow N^{-\frac{2}{3}} - \frac{Gm^2}{hc} > 0$$

$$\Leftrightarrow N < \left(\frac{hc}{Gm^2} \right)^{3/2} = \left(\frac{1}{\alpha m} \right)^{3/2} \quad (5.13)$$

In Analogie zur Feinstrukturkonstante

$$\alpha_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 hc} \approx \frac{1}{137}$$

manul man

$$\alpha_m = \frac{Gm^2}{hc} = 2 \cdot 10^{15} m^2 [kg] = \begin{cases} 1,7 \times 10^{-45} & m = m_{\text{elektron}} \\ 6,2 \times 10^{-39} & m = m_{\text{proton}} \end{cases} \quad (5.14)$$

oft die gravitative Feinstrukturkonstante (α).

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_e}{\alpha_m} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 Gm} = 4 \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2} / 2 \frac{Gm}{c^2} \\ &= 4 \frac{\text{klassischer Ladingradius für } e}{\text{Schwarzschildradius für } m} \end{aligned}$$

Die obere Schranke an N setzt auch eine obere Schranke an M . Ist $m = m_n =$ Nukleonennasse, so folgt

$$\begin{aligned}
 M &= N m < m_n \left(\frac{\hbar c}{G m_n^2} \right)^{3/2} \\
 &= m_n \cdot 2 \times 10^{57} \\
 &= 3,4 \times 10^{30} \text{ kg} \\
 &\approx 1,7 M_\odot.
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Kinetische Theorie

N Fermionen mit 2 internen Spin-Freiheitsgraden (Spin $1/2$) besetzen bei Temperatur $T=0$ ein Phasenraumvolumen $V \times \frac{4\pi}{3} p_F^3$, so dass

$$N = 2 \times \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^3 \int_V d^3x \int_{p \leq p_F} d^3p = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 \tag{5.17}$$

$$\Rightarrow p_F = \hbar (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (\text{Fermi-Impuls}) \tag{5.18}$$

$$\text{mit } n := N/V \tag{5.19}$$

Energie der Einzelteilchen-Zustände zum Impuls

$$E(p) = (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} \tag{5.20}$$

Verteilungsfunktion im Phasentraum

$$\sigma(\vec{x}, \vec{p}) = \begin{cases} 2 \times \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} & \text{für } p \leq p_F, \varphi \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int d^3x d^3p \sigma(\vec{x}, \vec{p}) = N$$

Energie

$$\begin{aligned} E &= \int \epsilon(p) \sigma(\vec{x}, \vec{p}) d^3x d^3p \\ &= \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi dp^2 (m^2c^4 + c^2 p^2)^{1/2} \\ &= \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2} \end{aligned} \quad (5.21)$$

mit $x := p/mc$

$$x_F := p_F/mc = \frac{\hbar}{mc} (3\pi^2 n)^{1/3}$$

$$= \lambda_c (3n/8\pi)^{1/3}$$

$$\approx (\lambda_c/2) / (1/n)^{1/3} \quad (5.22)$$

(nicht \hbar)

$$\lambda_c = h/mc = \text{Compton Wellenlänge} \quad (5.23)$$

x_F nähert sich von unten dem Wert $x_F = 1$

wenn die Teilchenabstände $d = (1/n)^{1/3}$

sich von oben der halben Compton Wellenlänge nähert

$$\text{Mit } f(x_F) := \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{8} \left[x_F (1+x_F^2)^{1/2} (1+2x_F^2) - \sinh^{-1}(x_F) \right] \quad (5.24a)$$

$$= \begin{cases} \frac{x_F^3}{3} + \frac{x_F^5}{10} - \frac{x_F^7}{56} + \dots & \text{für } x_F \ll 1 \\ \frac{x_F^4}{4} + \frac{x_F^2}{4} + \dots & \text{für } x_F \gg 1 \end{cases} \quad (5.24b)$$

Der Druck folgt wegen $T=0$ aus

$$p = - \frac{dE}{dV}, \quad \text{mit } E = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V f(x_F)$$

$$\text{und } x_F = \frac{\hbar}{mc} (3\pi^2 N)^{1/3} V^{-1/3}$$

$$\frac{dE}{dV} = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[f(x_F) + V f'(x_F) \frac{dx_F}{dV} \right]$$

$$= \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[f(x_F) - \frac{1}{3} x_F f'(x_F) \right]$$

$$\Rightarrow p = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \sqrt{1+x_F^2} - \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2} \right]$$

$$= \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \frac{1}{3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \frac{1}{3} g(x_F)$$

$$\text{mit } g(x_F) := \int_0^{x_F} dx \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{8} \left[x_F (1+x_F^2)^{1/2} (2x_F^2 - 3) + 3 \sinh^{-1}(x_F) \right]$$

Druck eines vollständig unrelativistischen ($T=0$) Fermiongas.

$$P(X_F) = \frac{W^4 C^5}{\pi^2 h^3} \frac{1}{3} g(X_F) \quad (5.26a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} g(X_F) &= \frac{1}{3} X_F^3 (1 + X_F^2)^{1/2} - f(X_F) = \int_0^{X_F} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \begin{cases} \frac{X_F^5}{15} - \frac{X_F^7}{42} + \frac{X_F^9}{72} + \dots & \text{für } X_F \ll 1 \\ \frac{X_F^4}{12} - \frac{X_F^2}{12} + \dots & \text{für } X_F \rightarrow \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (5.26b)$$

Es war

$$X_F = p_F / mc = \frac{h}{mc} (3\pi^2 n)^{1/3}$$

mit $n = \text{Teilchendichte}$

Wir wollen nun n mit der Massendichte
in Verbindung bringen

1. Fall. Die bisher betrachteten Teilchen
sind Elektronen. Dann ist die Massendichte
sehr genau (10^{-4}) gegeben durch

$m \rightarrow m_e$
 $n \rightarrow n_e$

$$\rho = \sigma m n n_e \quad (5.27)$$

$m n = \text{Baryonen (Nukleonen-) masse}$

$\sigma = \text{mittlere Anzahl der Baryonen}$
pro Elektron

$n_e = \text{Elektronendichte (bisheriges } n)$.

Beispiel: Für Helium und Kohlenstoff
ist $\sigma = 2$, für ^{56}Fe ist $\sigma = 2,15$

Also

$$\begin{aligned} X_F &= \frac{h}{m_e c} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{\sigma m_n} \right)^{1/3} \\ &= (\rho / \rho_c)^{1/3} \end{aligned} \quad (5.28a)$$

Mit der kritischen Dichte

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{\sigma m_n}{3\pi^2} \left(\frac{m_e c}{h} \right)^3 \\ &= \sigma \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{m_n}{[\lambda_e/2]^3} \approx \sigma \left[\lambda_e/2 \right]^3 \end{aligned} \quad (5.28b)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \lambda_e &:= \frac{h}{m_e c} = 2,42 \times 10^{-12} \text{ m} \\ &= \text{Comptonwellenlänge des Elektrons} \end{aligned} \quad (5.29a)$$

vgl. mit

$$\begin{aligned} \lambda_n &:= \frac{h}{m_n c} = 1,32 \times 10^{-15} \text{ m} \\ &= \text{Comptonwellenlänge des Protons/Neutrons.} \end{aligned} \quad (5.29b)$$

Also ist die kritische Dichte (der Nukleonen!)
im Falle des Elektronengases

$$\rho_c^{(e)} \approx \sigma \cdot 9,42 \cdot 10^8 \text{ kg m}^{-3} \approx \sigma \cdot 10^9 \text{ kg m}^{-3} \quad (5.30)$$

Also ist nach (5.24) der Druck als Funktion der Massendichte ρ gegeben durch

$$p(\rho) = \frac{hc^5}{\pi^2 h^3} \begin{cases} \frac{1}{15} \cdot (\rho/\rho_c)^{5/3} + \dots & \text{für } \rho \ll \rho_c \\ \frac{1}{12} \cdot (\rho/\rho_c)^{4/3} + \dots & \text{für } \rho \gg \rho_c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} K_1 \rho^{\gamma_1} & \text{für } \rho \ll \rho_c \\ K_2 \rho^{\gamma_2} & \text{für } \rho \gg \rho_c \end{cases} \quad (5.31a)$$

\Rightarrow Polytropen zu Konstanten und Indizes

$$K_1 = \frac{h^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2}{5 m_n} \right)^{5/3}, \quad \gamma_1 = \frac{5}{3}, \quad n_1 = 1.5 \quad \text{für } \rho \ll \rho_c$$

$$K_2 = \frac{hc}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{5 m_n} \right)^{4/3}, \quad \gamma_2 = \frac{4}{3}, \quad n_2 = 3 \quad \text{für } \rho \gg \rho_c \quad (5.31b)$$

Für diese Indizes haben die Lösungen der Lane-Emden-Gleichung folgende erste Nullstellen und dortige Ableitungen:

$$\gamma = \frac{5}{3} : \quad \xi_1 = 3.65375, \quad (5.32a)$$

$$\xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.71406$$

$$\gamma = \frac{4}{3} : \quad \xi_1 = 6.89685, \quad (5.32b)$$

$$\xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.01824$$

Aus den Formeln für (4.25a) und (4.26) für Radius und Masse erhält man dann für die beiden Grenzfälle

$$R = \begin{cases} \frac{2,00}{\sigma} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/6} 10^4 \text{ km} & \rho_0 \ll \rho_c, \gamma = \frac{10}{3} \\ \frac{5,31}{\sigma} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/3} 10^4 \text{ km} & \rho_0 \gg \rho_c, \gamma = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \frac{2,73}{\sigma^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{1/2} M_{\odot} & \rho_0 \ll \rho_c, \gamma = \frac{10}{3} \\ \frac{5,73}{\sigma^2} M_{\odot} = M_c & \rho_0 \gg \rho_c, \gamma = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Letzteres wegen der schon gemachten Bemerkung, dass für $\gamma = \frac{1}{3}$ M von $\rho_0 = \rho_0$ unabhängig wird.

\Rightarrow Es existiert eine obere Schranke an die Masse von Sternen, die durch den Entartungsdruck von Elektronen stabilisiert werden können (Weiße Zwerge). Diese Schranke heißt „Chandrasekhar Masse“ (Chandrasekhar 1930).

$$M_c = \frac{5,73}{\sigma^2} M_{\odot}$$

für $\sigma = 2$ (Helium, Kohlenstoff)

$$M_c = 1,43 M_{\odot}$$

Radius und Masse für $\gamma = \frac{\sigma}{3} \cdot \frac{4}{3}$

$$R = \left[\frac{k \gamma}{4\pi G (\gamma - 1)} \right]^{1/2} \rho_0^{\frac{\gamma-2}{2}} \epsilon_1$$

$$M = 4\pi \left[\frac{k \gamma}{4\pi G (\gamma - 1)} \right]^{3/2} \rho_0^{\frac{1}{2}(3\gamma-4)} \epsilon_1^2 \Theta(\epsilon_1)$$

$$\rho_c := \frac{\sigma m n}{3\pi^2} \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^3$$

1. Fall : $\gamma = \frac{\sigma}{3}$, $K = K_1 = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m c} \left(\frac{3\pi^2}{\sigma m n} \right)^{5/3}$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{5}{2}, \quad \frac{\gamma-2}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} R^{(e)} &= \left[\frac{\hbar^2}{24\pi^3 G m c} \left(\frac{3\pi^2}{\sigma m n} \right)^{5/3} \right]^{1/2} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/6} \rho_c^{-1/6} \epsilon_1 \\ &= \left(\frac{\sigma m n}{3\pi^2} \right)^{1/6} \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^{-1/2} \left(\frac{3\pi^2}{\sigma m n} \right)^{5/6} \left(\frac{\hbar^2}{24\pi^3 G m c} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/6} \epsilon_1 \\ &= \frac{3\pi^2}{\sigma m n} \frac{1}{m c} \hbar^{3/2} \left(\frac{1}{c G} \right)^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{2}3} \pi^{-3/2} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/6} \epsilon_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{\sigma} \frac{1}{m n} \frac{1}{m c} \hbar^{3/2} \left(\frac{1}{c G} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/6} \epsilon_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{\sigma} \frac{\hbar}{m n c} \frac{\hbar}{m c} \left(\frac{c^3}{\hbar G} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/6} \epsilon_1 \\ &= \left(\frac{3\pi}{8} \right)^{1/2} \frac{1}{\sigma} \frac{\hbar c \hbar n}{\lambda p} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/6} \epsilon_1 \end{aligned}$$

Wobei $\lambda = \frac{h}{mc} = \text{red. Compton-Wellenlänge}$

$$\lambda_P = \left(\frac{h c}{c^3} \right)^{1/2} = \text{Planck Länge}$$

$$M^{(1)} = 4\pi \left[\frac{h^2}{24\pi^3 G m_e} \left(\frac{3\pi^2}{8 m_n} \right)^{5/3} \right]^{3/2} \rho_c^{1/2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{1/2} \xi_1^2 |\Theta(\xi_1)|$$

$$= 4\pi \left(\frac{8 m_n}{3\pi^2} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e c}{h} \right)^{3/2} \left(\frac{3\pi^2}{8 m_n} \right)^{5/2} \left(\frac{h^2}{24\pi^3 G m_e} \right)^{3/2} \times \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{1/2} \xi_1^2 |\Theta(\xi_1)|$$

$$= 4\pi \left(\frac{3\pi^2}{8 m_n} \right)^2 \frac{h^{3/2}}{c^{3/2}} G^{-3/2} \left(\frac{1}{24\pi^3} \right)^{3/2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{1/2} \xi_1^2 |\Theta(\xi_1)|$$

$$= 4\pi \frac{m_p^3}{m_n^2} \frac{1}{\sigma^2} \cdot 9 \cdot \pi^4 \left(\frac{1}{24} \right)^{3/2} \frac{1}{\pi^{3/2}} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{1/2} \xi_1^2 |\Theta(\xi_1)|$$

$$= \frac{9 \cdot 4\pi}{(24)^{3/2} \cdot \pi^{1/2}} \frac{1}{\sigma^2} \frac{m_p^3}{m_n^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{1/2} \xi_1^2 |\Theta(\xi_1)|$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{8} \right)^{1/2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{m_p^3}{m_n^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{1/2} \xi_1^2 |\Theta(\xi_1)|$$

$$2. \text{ Fall : } \gamma = \frac{4}{3}, \quad K = K_2 = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{\sigma mn} \right)^{4/3}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} = 4, \quad \frac{\gamma-2}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} R &= \left[\frac{\hbar c}{12\pi^3 G} \left(\frac{3\pi^2}{\sigma mn} \right)^{4/3} \right]^{1/2} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/3} \rho_c^{-1/3} \xi_1 \\ &= \left(\frac{\sigma mn}{3\pi^2} \right)^{-1/3} \frac{\hbar}{m c} \left(\frac{3\pi^2}{\sigma mn} \right)^{2/3} \left(\frac{\hbar c}{12\pi^3 G} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/3} \xi_1 \\ &= \frac{3\pi^2}{\sigma mn} \frac{\hbar}{m c} \frac{1}{2\sqrt{3}} \pi^{3/2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/3} \xi_1 \\ &= \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \frac{1}{\sigma} \frac{\hbar}{m n c} \frac{\hbar}{m c} \frac{c}{\hbar} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/3} \xi_1 \\ &= \frac{(3\pi)^{1/2}}{2} \frac{1}{\sigma} \frac{\lambda_e \lambda_n}{\lambda_p} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/3} \xi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \left[\frac{\hbar c}{12\pi^3 G} \left(\frac{3\pi^2}{\sigma mn} \right)^{4/3} \right]^{3/2} \rho_0^0 \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \\ &= 4\pi \left(\frac{\hbar c}{12\pi^3 G} \right)^{3/2} \left(\frac{3\pi^2}{\sigma mn} \right)^2 \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \\ &= \frac{4\pi}{(12\pi^3)^{3/2}} \frac{m^3 p^3}{m n^2} \frac{1}{\sigma^2} 9\pi^4 \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \\ &= \frac{36\pi^5 \pi^{-9/2}}{(\sqrt{3} \cdot 2)^3} \frac{m^3 p^3}{m n^2} \frac{1}{\sigma^2} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \\ &= \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{m^3 p^3}{m n^2} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \end{aligned}$$

Es ist

$$m_P := \left(\frac{hc}{G} \right)^{1/2} = 1,221 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$$

$$= 2,177 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

$$m_n = 939,565 \text{ MeV}/c^2$$

$$= 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$$

$$= 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\lambda_p = 1,616 \times 10^{-35} \text{ m}$$

$$\hbar = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$c = 2,998 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\lambda_e := \frac{\hbar}{m_e c} = 3,86 \times 10^{-13} \text{ m}$$

$$\lambda_n := \frac{\hbar}{m_n c} = 2,1 \times 10^{-16} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_e \lambda_n}{\lambda_p} = 5,02 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\frac{m_P^3}{m_n^2} = 3,68 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$= 1,85 M_\odot$$

BRUNNEN

$$M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$1. \text{ Fall } : \gamma = \frac{5}{2}, \quad \xi_1 = 3,65375$$

$$\xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2,71403$$

$$R = 1,085 \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot 5,02 \times 10^6 \text{ m} \cdot 3,65375 \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/6}$$

$$= \frac{1,99}{\sigma} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/6} \cdot 10^4 \text{ km}$$

$$M = 0,543 \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot 1,85 M_\odot \cdot 2,71403 \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{2,725}{\sigma^2} \cdot M_\odot \cdot \left(\rho_0 / \rho_c\right)^{1/2}$$

$$2. \text{ Fall } \quad \gamma = \frac{4}{3}, \quad \xi_1 = 6,89685$$

$$\xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2,01825$$

$$R = 1,535 \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot 5,02 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 6,89685 \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/3}$$

$$= \frac{5,314}{\sigma} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/3} \cdot 10^4 \text{ km}$$

$$M = 1,535 \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot 1,85 M_\odot \cdot 2,01825$$

$$= \frac{5,731}{\sigma^2} \cdot M_\odot$$

Für Neutronensterne setzt man $m_e \rightarrow m_n$,
 $\lambda_e \rightarrow \lambda_n$ und $\sigma = 1$. Also

1. Fall $\gamma = \frac{5}{3}$

$$R = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{\lambda_n^2}{\rho_p} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/6} \xi_1^{(\gamma=5/3)}$$

$$M = \left(\frac{3\pi}{32}\right)^{1/2} \frac{m_p^3}{m_n^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{1/2} \left[\xi_1^2 \Theta'(\xi_1)\right]^{(\gamma=5/3)}$$

2. Fall $\gamma = \frac{4}{3}$

$$R = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/2} \frac{\lambda_n^2}{\rho_p} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/3} \xi_1^{(\gamma=4/3)}$$

$$M = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/2} \frac{m_p^3}{m_n^2} \left[\xi_1^2 \Theta'(\xi_1)\right]^{(\gamma=4/3)}$$

Berechnet man die Zahlenwerte, so braucht man nur zu benutzen, dass die Faktoren vor den Potenzen von (ρ_0/ρ_c) bzw. (ρ_c/ρ_0) durch einfache numerische Vielfache von den entsprechenden Werten im Elektronen-Fall gegeben sind; nämlich

$\sigma \cdot \frac{m_e}{m_n}$ für den Radius und

σ^2 für die Masse. Also ist mit

$$\sigma \cdot \frac{m_e}{m_n} \approx \frac{\sigma}{1836}$$

5.11h

$$R = \begin{cases} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/6} 10,8 \text{ km} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/3} 28,9 \text{ km} & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} (\rho_0 / \rho_c)^{1/2} \cdot 2,725 \cdot M_{\odot} & \text{für } \gamma = 5/3 \\ 5,731 \text{ } M_{\odot} & \text{für } \gamma = 4/3 \end{cases}$$

Geht $M \rightarrow M_c$, und $\gamma \downarrow \frac{1}{3}$, so wegen der Massenformel $\rho(0) \rightarrow \infty$. Wegen $R \sim (\rho_c / \rho_0)^{1/6}$ gilt $R \rightarrow 0$: der Stern kollabiert. All das passiert jenseits der kritischen Massendichte $\rho_c \approx 2 \cdot 10^8 \text{ kg m}^{-3}$ zur Beschreibung des Kollapses ist die Newtonsche Theorie aber nur bedingt gültig. (Sicher nicht für $R \rightarrow 0$)

Zur Abschätzung der Gültigkeit der Newtonschen Theorie berechnen wir für $\rho_0 \gg \rho_c$

$$\begin{aligned} \text{„Kompaktheitsparameter“} &= \frac{GM}{c^2 R} = \frac{G}{c^2} \frac{5,73}{\sigma^2} M_\odot / \frac{5,131}{\sigma} \left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{1/3} \times 10^4 \text{ km} \\ &\approx \frac{G M_\odot}{c^2 \cdot 10^4 \text{ km}} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{1/3} \\ &= \frac{1,5}{\sigma} \times 10^{-4} \times \left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

Damit also etwa $GM/c^2 R < 10^{-2}$ ist, muss gelten

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right)^{1/3} < 10^2 \Leftrightarrow \rho_0 < 10^6 \rho_c$$

\Rightarrow Weiße Zwerge brauchen zu ihrer Beschreibung die SRT, aber nicht die ART.

Zum Schluß müssen wir noch die Annahme $T=0$ im Sinne einer Approximation rechtfertigen.

Für den Fermi-Impuls gilt

$$\frac{p_F}{m_e c} = \left(\rho / \rho_c \right)^{1/3}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho_c &= \sigma \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{M_H}{[X_e/2]^3} \approx \sigma \frac{M_H}{[X_e/2]^3} \\ &\approx \sigma \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

Die zugehörige kinetische Energie ist

$$\begin{aligned} E_F^{(kin)} &= \left(p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4 \right)^{1/2} - m_e c^2 \\ &= m_e c^2 \left\{ \left[1 + \left(\rho / \rho_c \right)^{2/3} \right]^{1/2} - 1 \right\} \\ &\approx 10^{-13} \text{ J} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\rho [\text{kg}/\text{m}^3]}{\sigma \times 10^9} \right)^{2/3} \right]^{1/2} - 1 \right\} \end{aligned}$$

Diese entspricht einer Temperatur

$$\left(E = \frac{3}{2} kT \right)$$

$$T_F = \frac{2}{3} E_F^{(kin)} / k$$

$$\approx 10^{10} \text{ K} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\rho [\text{kg}/\text{m}^3]}{\sigma \times 10^9} \right)^{2/3} \right]^{1/2} - 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} m_e &= 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \\ &\approx 10^{-30} \text{ kg} \\ c &= 3 \times 10^{16} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 10^{17} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \\ \frac{3}{2} k &\approx 10^{-23} \text{ J/K} \end{aligned}$$

Also $T_F \approx 10^{10}$ K falls ρ in der Nähe der kritischen Dichte ist. Dies ist wesentlich größer als die Spektroskopisch gemessene Temperatur weißer Zwerge

$$5 \cdot 10^3 \text{ K} \leq T_{\text{Spek}} \leq 5 \cdot 10^4 \text{ K}$$

Selbst unmittelbar nach der Entstehung eines weißen Zwergs aus einem roten Riesen wird die Temperatur auf $\sim 10^8$ K geschätzt, so daß auch hier die Fermi-Energie die thermische überwiegt.

Die Dominanz der Fermi-Energie der Elektronen über ihre thermische Energie kommt auch im Alltag vor. So hat Eisen zwei Valenzelektronen im 4s Zustand, die in metallischem Zustand nahezu frei im Ionengitter beweglich sind. Die Atomnummer ist 56 also $\sigma = 56:2 = 28$ die Dichte $\sim 7900 \text{ kg/m}^3 \sim 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$\frac{T_F(\text{Eisen})}{T} \approx 10^{10} \text{ K} \frac{1}{2} \left(\frac{8 \cdot 10^3}{28 \cdot 10^3} \right)^{2/3} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ K}$$

Neutronensterne:

Benutze die gleichen Formeln für entartetes Gas, aber mit m_n statt m_e und $\sigma = 1$;
Satz (5.27) hat man also

$$\rho = n$$

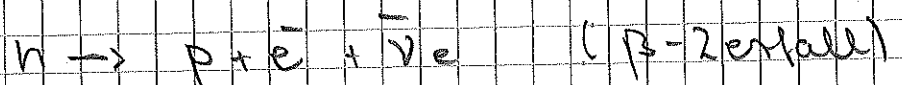
und statt (5.29a)

$$\lambda_n = \frac{h}{m_n c} = 1,32 \times 10^{-15} \text{ m}$$

Die kritische Dichte (Wieder der Nukleonen) ist um den Faktor $(\lambda_e / \lambda_n)^3 = (m_n / m_e)^3 = 6,11 \times 10^9$ größer:

$$\rho_c^{(n)} = 5,8 \times 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$$

Die Möglichkeit von Sternen solcher extrem hoher Dichten wurde bereits von Landau direkt nach Entdeckung des Neutrons 1932 durch James Chadwick gesehen. Sie entstehen durch "inversen Betazerfall" ("Neutronisierung")



der möglichst wird, sobald die Elektronen an der Fermienergie die Energie $\Delta E = (m_n - m_p - m_e)c^2$

$$\left. \begin{array}{l} m_n = 1,6749274 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ m_p = 1,6726218 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ m_e = 9,1093829 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \end{array} \right\} (m_n - m_p - m_e)c^2 = 1,2534594 \cdot 10^{-13} \text{ J} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1,3946617 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

"Überschneigen".

Für $\rho_0 \ll \rho_c$ erhalten wir dann eine polytrope Zustandsgleichung

$$p = K \rho^\gamma$$

mit

$$K = \frac{h^2}{15T^2 m n} \left(\frac{3\pi^2}{m n} \right)^{5/3}, \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

und es folgt aus der Lane-Emden-Formeln (4.25a) und (4.26) wie zuvor

$$\left. \begin{aligned} R &= 11 \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{1/6} \text{ km} \\ M &= 2.7 \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{1/2} M_\odot \end{aligned} \right\} \text{ für } \rho_0 \ll \rho_c$$

Der "Kompaktheitsparameter" ist nun

$$\begin{aligned} G \frac{M}{c^2 R} &= G \frac{2.7 (\rho_0 / \rho_c)^{1/2} M_\odot}{c^2 11 (\rho_c / \rho_0)^{1/6} \text{ km}} \\ &= \underbrace{G \frac{M_\odot}{c^2 \text{ km}}}_{1.5} \frac{2.7}{11} (\rho_0 / \rho_c)^{2/3} \\ &= 0.36 \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

Für $\rho_0 \rightarrow \rho_c$ werden Allgemein-Relativistische Korrekturen wichtig.

Sterne mit Elektronen-Entartung sind mit Newtonscher Gravitations-Theorie und SRT für Materie beschreibbar, auch für $\rho_0 \gg \rho_c \approx 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ($p_F \gg m_e c$)

Sterne mit Neutronen Entartung können mit Newtonscher Gravitations-Theorie nur für $\rho_0 \ll \rho_c = 6 \cdot 10^{18} \text{ kg/m}^3$ beschrieben werden

Die Theorie der Neutronensterne ist deshalb viel komplizierter als die der weißen Zwerge. Modellrechnungen gehen auch hier Instabilitäten für $\rho_0 \nearrow \rho_c$, mit Grenzmassen im Bereich

$$1.5 M_{\odot} \leq M \leq 3 M_{\odot}$$

Eine so einfache Kriterium wie das durch die Chandrasekhar-Masse existiert jedoch nicht.