Vorlesung 6.

Sphärisch symmetrische Sterne in der ART

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & c\,g^n \\ \frac{1}{c} S^m & t^{mn} \end{pmatrix}$$

W = E-dichte, $\vec{S}$ = E-Stromd.,
$\vec{g}$ = Impulsdichte, t = Impuls-Stromdichte

Einsteingleichungen ($\Lambda = 0$)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \varkappa T_{\mu\nu} \tag{6.1a}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{\mu\nu} = \varkappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \tag{6.1b}$$

$$\varkappa = 8\pi G / c^4, \tag{6.1c}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \tag{6.1d}$$

<u>Konventionen</u>

Signatur$(g) = (+1, -1, -1, -1)$

$\mu, \nu, \lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$a, b, c \in \{1, 2, 3\}$.

Krümmungstensor

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\beta}$$

Ricci-

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{6.2}$$

$$= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\alpha\mu}$$

Energie-Impulstensor für ideale „Flüssigkeit":

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)\, u_\mu u_\nu - p\, g_{\mu\nu} \qquad (6.3)$$

ρ = Massendichte } im lokal mitbewegten
p = Druck } Bezugssystem

Aus $\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0$

folgt $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \qquad (6.4)$

⇒ Entropie / Teilchen ist entlang u erhalten; und relativistische Eulergleichung } Siehe Übungen Blatt 2 Aufg. 2

Sphärisch-symmetrische (statische) Metrik

$$g = e^{2a(r,t)} c^2 dt^2 - e^{2b(r,t)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \qquad (6.5)$$

Hier ist r-Koordinate so gewählt, daß die Oberfläche einer durch r parametrisierten Sphäre durch $A = 4\pi r^2$ gegeben ist ⇒ r ist der sog. Oberflächenradius.
Beachte: die 2-d Flächen r = konst. sind die Orbits der Isometriegruppe SO(3).

Wir schreiben

$$g = \theta^0 \otimes \theta^0 - \sum_{a=1}^{3} \theta^a \otimes \theta^a \qquad (6.6)$$

mit

$$\theta^0 = e^{a} \, dx^0 \quad , \; x^0 = ct \qquad (6.7a)$$

$$\theta^1 = e^{b} \, dr \qquad (6.7b)$$

$$\theta^2 = r \, d\vartheta \qquad (6.7c)$$

$$\theta^3 = r \sin\vartheta \, d\varphi \qquad (6.7d)$$

Bezogen auf diese orthonormierte Basis von Ko-Basisfeldern sind die Komponenten des Einstein-Tensors gegeben durch

$$G_{00} = \frac{1}{r^2}\left[1 - e^{-2b}\right] + \frac{2b'}{r} e^{-2b} = \frac{1}{r^2}\left[r\left(1 - e^{-2b}\right)\right]' \qquad (6.8a)$$

$$G_{01} = \frac{2\dot{b}}{r} e^{-(a+b)} \qquad (6.8b)$$

$$G_{02} = G_{03} = 0 \qquad (6.8c)$$

$$G_{11} = -\frac{1}{r^2}\left[1 - e^{-2b}\right] + \frac{2a'}{r} e^{-2b} \qquad (6.8d)$$

$$G_{12} = G_{13} = 0 \qquad (6.8e)$$

$$G_{22} = G_{33} = -e^{-2a}\left[\ddot{b} + \dot{b}^2 - \dot{a}\dot{b}\right] + e^{-2b}\left[a'' + a'^2 - a'b' + \frac{1}{r}(a' - b')\right] \qquad (6.8f)$$

$$G_{23} = 0. \qquad (6.8g)$$

Vakuum Lösung (außerhalb Materie $T_{\mu\nu} = 0$)

- $G_{01} = 0 \Rightarrow \dot{b} = 0 \Rightarrow b = b(r)$

- $G_{00} + G_{11} = (a+b)' \frac{2}{r} e^{-2b} = 0$

  $\Leftrightarrow (a+b)' = 0 \Rightarrow a(r,t) = -b(r) + f(t)$

- $G_{00} = 0 \Leftrightarrow [r(1-e^{-2b})]' = 0$

  $\Rightarrow [r(1-e^{-2b})] = \text{konst} = 2m$

  $$\Rightarrow e^{-2b} = 1 - \frac{2m}{r} \tag{6.9}$$

- Mit $a' = -b'$ und $\dot{b} = 0$ wird

  $G_{22} = e^{-2b}[-b'' + b'^2 + b'^2 - \frac{2}{r} b']$

  $= -\frac{1}{2r}[r(1-e^{-2b})]''$

  $$= -\frac{1}{2r}[r^2 G_{00}]' \tag{6.10}$$

Also ist $G_{22} = G_{33} = 0$ automatisch erfüllt falls $G_{00} = 0$.

Als Lösung erhalten wir also

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) e^{2f(t)} c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 d\Omega^2 \tag{6.11}$$

mit unbestimmter Funktion $f(t)$.

Setzen wir noch

$$T = g(t) := \int_{t_0}^{t} e^{f(t')}\, dt'$$

so daß $d\tilde{t} = e^{f(t)}\, dt$, dann (6.11)

$$\boxed{g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 d\tilde{t}^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)}$$

Da $e^a > 0$, $e^b > 0$ gilt diese Lösung nur für $r > 2m$.

Vgl. mit der Newtonschen Approximation

$$\ddot{x}^a + \Gamma^a_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \curvearrowright$$

$$\ddot{x}^a = -\frac{c^2}{2} g^{ab} (-g_{00,b}) = -\partial_a \phi$$

$$\Rightarrow \quad g_{00} = 1 + 2\phi / c^2$$

Vgl. mit $g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}$

$$\Rightarrow \frac{2\phi}{c^2} = -\frac{2GM}{r c^2} = -\frac{2m}{r}$$

$$\Rightarrow m = \frac{GM}{c^2} \qquad (6.12)$$

$2m = \frac{2GM}{c^2} = r_s$ = Schwarzschild-Radius. (6.13)

Theorem (Birkhoff): Sei (M, g) eine sphärisch symmetrische Raumzeit und R der Oberflächenradius der $SO(3)$-Orbits

$$R = (A/4\pi)^{1/2} \qquad (6.14)$$

Dann ist die Untermenge

$$M' = \{p \in M \mid g(dR, dR) < 0\}$$

aller Punkte, an denen dR raumartig ist, statisch, d.h. besitzt einen hyperflächenorthogonales zeitartiges Killing-Vektorfeld

Dies ist z.B. analog dem Ergebnis, daß auch in der Elektrodynamik jede sphärische symmetrische Lösung der Vak. Maxwellgleichung notwendig zeitunabhängig ist. Sphärisch-symmetrische Pulsationen eines Sterns erzeugen keine Zeitabhängigkeit des Gravitationsfeldes, insbesondere ist damit keine Abstrahlung von Gravitationswellen verbunden.

Lösung im Innenraum des Sterns

Die Materie besteht aus einer idealen Flüssigkeit, die entlang der Integrallinien des zeitartigen Killingfeldes strömt:

$$T = T^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$$

$$= (\varrho c^2 + p)\, e_0 \otimes e_0 - p\, g^{-1} \qquad (6.15)$$

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^0}$$

$$g^{-1} = g^{\mu\nu} \cdot e_\mu \otimes e_\nu$$

$$= e_0 \otimes e_0 - \sum_{a=1}^{3} e_a \otimes e_a$$

Alternativ:

$$\underline{T} = T_{\mu\nu}\, \theta^\mu \otimes \theta^\nu =$$

$$= (\varrho c^2 + p)\, \theta^0 \otimes \theta^0 - p\, g \qquad (6.16)$$

$$\theta^0 = \frac{1}{\sqrt{g^{00}}}\, dx^0$$

$$g = g_{\mu\nu}\, \theta^\mu \otimes \theta^\nu$$

$$= \theta^0 \otimes \theta^0 - \sum_{a=1}^{3} \theta^a \otimes \theta^a$$

Wobei $\{e_\mu\}$, $\{\theta^\mu\}$ duale Basenpaare sind: $\theta^\mu(e_\nu) = \delta^\mu{}_\nu$.

Die Einstein-Gleichungen sind

$$G = \varkappa T \qquad (\Leftrightarrow G^{\mu\nu} = \varkappa T^{\mu\nu})$$

bzw

$$\underline{G} = \varkappa \underline{T} \qquad (\Leftrightarrow G_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}) \qquad (6.17)$$

Sie implizieren (Integrabilitätsbedingung)

$$\operatorname{div}(T) = 0 \qquad (\Leftrightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0)$$

$$= \mathrm{Spur}_{1,2}(\nabla T) = 0 \qquad (6.18)$$

Nun ist

$$\nabla T = d(\varrho c^2 + p) \otimes e_0 \otimes e_0 - dp \otimes g^{-1}$$
$$+ (\varrho c^2 + p)\, \omega^\mu{}_0 \otimes e_\mu \otimes e_0$$
$$+ (\varrho c^2 + p)\, \omega^\mu{}_0 \otimes e_0 \otimes e_\mu \qquad (6.19)$$

wegen $\nabla e_0 = \omega^\mu{}_0 \otimes e_\mu$ mit

$\omega^\mu{}_\nu$ = Zusammenhangs 1-Form

$\mathrm{Spur}_{1,2}$ bedeutet anwenden der 1-Form aus dem 1. Faktor auf Vektor im 2. Faktor

Also

$$\operatorname{div}(T) = e_0(\varrho c^2 + p)\, e_0 - e_0(p)\, e_0 + \sum_{a=1}^{3} e_a(p)\, e_a$$
$$+ (\varrho c^2 + p)\, \omega^\mu{}_0(e_\mu)\, e_0$$
$$+ (\varrho c^2 + p)\, \omega^\mu{}_0(e_0)\, e_\mu \qquad (6.20)$$

Aus der expliziten Form (5A.9) der Zusammenhangskoeffizienten (für den hier spezialisierten Fall $R = r$, $\dot{R} = 0$) folgt, dass

$$W^r{}_0(e_0) = e^{-b} a' = e_r(a) \qquad (6.21a)$$

$$W^r{}_0(e_r) = e^{-a} \dot{b} = e_0(b) \qquad (6.21b)$$

und sonst alle $W^\mu{}_0(e_\nu)$ verschwinden.

$\Rightarrow$

$$\mathrm{div}(T) =$$

$$e_0 \left(c^2 e_0(\rho) + (\rho c^2 + p)\, e_0(b) \right)$$

$$+ e_r \left(e_r(p) + (\rho c^2 + p)\, e_r(a) \right) \qquad (6.22)$$

(6.24) Ist ρ zeitunabhängig so muss also $\dot{b} = 0$ sein, was auch aus $G_{0r} = 0$ folgt, wie wir noch sehen werden. Also ist $\mathrm{div}(T) = 0$ äquivalent zu

$$e_r(p) = \frac{1}{\sqrt{-g_{rr}}} \frac{\partial}{\partial r}(p) = -e^{-b} (\rho c^2 + p)\, a'$$

mit $a' = \frac{\partial}{\partial r} a$. Mit $g_{rr} = -e^{2b}$ also

$$p' = -a' (\rho c^2 + p)$$

bzw. $$a' = -p' / (\rho c^2 + p). \qquad (6.23)$$

Die auf die Θ^μ bezogenen Komponenten des Energie-Impulstensors sind also

$$T_{00} = \rho c^2$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = p$$

$$T_{0a} = T_{ab} = 0 \quad \text{für } a \neq b$$

(0,1) Aus $T_{01} = 0 \Rightarrow G_{01} = 0$

$$\Rightarrow \dot{b} = 0 \Rightarrow b = b(r) \tag{6.24}$$

(0,0) $G_{00} = \varkappa T_{00} \iff$

$$\left[r\left(1 - e^{-2b(r)}\right)\right]' = \varkappa r^2 \rho c^2$$

$$r\left(1 - e^{-2b(r)}\right) = \varkappa c^2 \int_0^r r'^2 \rho(r')\, dr'$$

$$= \frac{2G}{c^2} M(r) ,$$

mit

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr'\, r'^2 \rho(r') . \tag{6.25}$$

$$\Rightarrow e^{-2b(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} . \tag{6.26}$$

(1,1) $G_{11} + G_{00} = \frac{2}{r} e^{-2b} (a+b)'$

$$= \varkappa (\rho c^2 + p) \tag{6.27}$$

$$\Rightarrow (a+b)' = \frac{1}{2} \varkappa e^{2b} (\rho c^2 + p) = \frac{4\pi G}{c^2} e^{2b} r (\rho + p/c^2)$$

Da $g_{\mu\nu}(r\to\infty)\to\eta_{\mu\nu}$ (Forderung der asymptotischen Flachheit = Randbed.) muß $a(r\to\infty)=b(r\to\infty)=0$ gelten. Integration der letzten Gleichung von ∞ nach r liefert dann

$$a(r)=-b(r)+\frac{4\pi G}{c^2}\int_\infty^r dr'\, e^{2b(r')}\, r'\left(\rho(r')+p(r')/c^2\right) \tag{6.28}$$

Angenommen $\rho(r)$ sei bekannt, dann folgt $M(r)$ aus (6.25) und $b(r)$ aus (6.26). Ist auch $p(r)$ bekannt, etwa bei bekanntem $\rho(r)$ durch Angabe einer Zustandsgleichung $p(\rho)$, dann folgt auch $a(r)$ aus (6.28), so dass die Metrik vollständig bekannt ist. So kann man z.B. im Fall inkompressibler Materie (ρ = konst für $r\le R$, $\rho=0$ für $r>R$) vorgehen.

Um bei bekannter Zustandsgleichung $p(\rho)$ eine Gleichung zu bekommen, die nur $\rho(r)$ involviert (analog zu $p'=-GM(r)\rho(r)/r^2$ im Newtonschen Fall) müssen wir $a(r)$ aus (6.28) eliminieren. Das geschieht mit Hilfe von (6.23). Aus (6.28) folgt durch Ableiten (r)

$$a'=-b'+\frac{4\pi G}{c^2}e^{2b}\,r\left(\rho+p/c^2\right) \tag{6.29}$$

Aus (6.26) folgt durch Ableiten nach r

$$-2b' e^{-2b} = -2 \frac{G}{c^2} \left(\frac{M}{r}\right)'$$

$$\Rightarrow \quad b' = e^{2b} \frac{G}{c^2} \left(\frac{M}{r}\right)' \qquad (6.30)$$

Eingesetzt in (6.29)

$$a' = e^{2b} \frac{G}{c^2} \left[4\pi r (\rho + p/c^2) - \left(\frac{M}{r}\right)' \right]$$

wobei wegen (6.25)

$$M'(r) = 4\pi r^2 \rho(r), \qquad (6.31)$$

$$\Rightarrow \quad a' = e^{2b} \frac{G}{c^2} \left[4\pi r \, p/c^2 + \frac{M}{r^2} \right] \qquad (6.32)$$

Daraus eliminieren wir a' mit Hilfe von (6.23) und erhalten, indem wir noch e^{2b} gemäß (6.26) ersetzen

$$-p' = G \, \frac{M(r) + 4\pi r^3 p(r)/c^2}{r^2 \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]} \left(\rho(r) + p(r)/c^2 \right) \qquad (6.33)$$

(Tolman-Oppenheimer-Volkoff 1939)

Diese Gleichung ersetzt (4.13), wobei (6.31) mit (4.12) übereinstimmt.

Achtung: Analog zu $\frac{d}{dr}$ in der Newtonschen Theorie ist e_r, nicht $\frac{\partial}{\partial r}$. Nur e_r gibt die Änderungsrate pro radialer Eigendistanz. Da $g(\partial/\partial r, \partial/\partial r) = g_{rr} = -e^{2b}$ ist

$$e_r = e^{-b} \frac{\partial}{\partial r} \quad , \text{ also}$$

$$-e_r(p) = G \frac{M(r) + 4\pi r^3 p(r)/c^2}{r^2 \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{1/2}} \left(\rho(r) + p(r)/c^2\right) \qquad (6.34)$$

hier war vorher eine 1.

Die drei allgemein-relativistischen Korrekturen sind:

1.) $M(r) \to M(r) + 4\pi r^3 p(r)/c^2$

$\rightarrow$ Druck erhöht <u>aktive</u> schwere Masse

2.) $\rho(r) \to \rho(r) + p(r)/c^2$

$\rightarrow$ Druck erhöht <u>passive</u> schwere Masse

3.) $\frac{1}{r^2} \to \frac{1}{r^2} \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{-1/2}$

$\rightarrow$ Krümmung des Raumes erhöht Druckgradienten (Zuwachs des Druckes pro radialer Eigendistanz).

$\Rightarrow$ <u>Alle 3 Effekte tragen zur Instabilität bei.</u>

Spezialfall: Inkompressible Materie

- Bemerkung: Nach der SRT ist strikte Inkompressibilität unmöglich, weil dann die Schallgeschwindigkeit im Material,

$$V_{schall} := \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} \tag{6.35}$$

unendlich würde $d\varrho / dp = 0$ da keine Druckerhöhung ein endliches $d\varrho$ hervorbringen kann. [$p = K\varrho^{\gamma}$, für $\gamma \to \infty$]

Also

$$\varrho(r) = \begin{cases} \varrho_0 > 0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases} \tag{6.36}$$

$$\Rightarrow \quad M(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\varrho_0 r^3 = M\frac{r^3}{R^3} & \text{für } r \leq R \\ \frac{4\pi}{3}\varrho_0 R^3 =: M & \text{für } r \geq R \end{cases} \tag{6.37}$$

$\Rightarrow$ TOV-Gleichung für $r \leq R$

$$\frac{p'}{(p + c^2\varrho_0)(p + c^2\varrho_0/3)} = -\frac{4\pi G r}{c^4}\left[1 - \frac{8\pi G \varrho_0 r^2}{3c^2}\right]^{-1}$$

gewöhnliche Differentialgleichung für $p(r)$.

Benutze statt r die dimensionslose Variable

$$X := \left[\frac{8\pi G \varrho_0}{3c^2}\right]^{1/2} r$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{(p+c^2\varrho_0)(p+c^2\varrho_0/3)} = -\frac{3}{2\varrho_0 c^2} \frac{X\,dX}{1-X^2}$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(p+\varrho_0 c^2)(p+\varrho_0 c^2/3)} = \frac{a}{(p+\varrho_0 c^2)} + \frac{b}{(p+\varrho_0 c^2/3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a(p+\varrho_0 c^2/3) + b(p+\varrho_0 c^2) \equiv 1 \quad \forall p$$

$$\Leftrightarrow \quad b = -a = 3/(2\varrho_0 c^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p+\varrho_0 c^2} - \frac{dp}{p+\varrho_0 c^2/3} = \frac{X\,dX}{1-X^2}$$

Integration von r nach $r = R$, wobei R so definiert ist, dass dort $p(R) = 0$, ergibt

$$\ln(p+\varrho_0 c^2)\Big|_r^R - \ln(p+\varrho_0 c^2/3)\Big|_r^R = -\frac{1}{2}\ln(1-X^2)\Big|$$

$$\ln\left(\frac{\varrho_0 c^2}{p(r)+\varrho_0 c^2} \cdot \frac{p(r)+\varrho_0 c^2/3}{\varrho_0 c^2/3}\right) = \ln\left[\frac{1-X_r^2}{1-X_R^2}\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{3\,p(r)+\varrho_0 c^2}{p(r)+\varrho_0 c^2} = \left[\frac{1-8\pi G\varrho_0 r^2/3c^2}{1-8\pi G\varrho_0 R^2/3c^2}\right]^{1/2}$$

$$\frac{3\,p(r) + \varrho_0 c^2}{p(r) + \varrho_0 c^2} = \left[\frac{1 - r^2 r_s / R^3}{1 - r_s / R}\right]^{1/2}$$

wobei $r_s := 2GM/c^2 = \frac{8\pi G \varrho_0}{3c^2} R^3$ (6.38)

= Schwarzschild-Radius.

Diese Gleichung kann man nach $p(r)$ auflösen:

$$p(r) = \varrho_0 c^2 \frac{\left(1 - \frac{r^2 r_s}{R^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{r_s}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{r_s}{R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{r^2 r_s}{R^3}\right)^{1/2}} \qquad (6.39)$$

Die metrischen Koeffizienten $e^{b(r)}$ und $e^{a(r)}$ folgen aus (6.25) und (6.28):

$$e^{2b(r)} = \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{-1}$$

$$= \begin{cases} \left[1 - \frac{r_s r^2}{R^3}\right]^{-1} & \text{für } r \leq R \\ \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]^{-1} & \text{für } r \geq R \end{cases} \qquad (6.40)$$

Zur Bestimmung von $a(r)$ gehen wir von (6.28) aus

$$a(r) = -b(r) + \frac{4\pi G}{c^2}\int_\infty^r dr'\, e^{2b(r')}\, r'\left[\rho(r') + p(r')/c^2\right] \qquad (6.28)$$

Für $r \geq R$ ist $\rho(r)$ und $p(r) = 0$ und deshalb

$$\left.\begin{aligned} a(r) &= -b(r) \\ \text{bzw.}\quad e^{2a(r)} &= 1 - \frac{r_s}{r} \end{aligned}\right\} \text{für } r \geq R \qquad (6.41)$$

Für $r \leq R$ haben wir das Integral

$$\int_R^r dr'\, r' \frac{\rho_0 + p(r')/c^2}{1 - \frac{r'^2 r_s}{R^3}} \qquad (6.42)$$

auszuwerten. Es ist mit (6.39)

$$\rho_0 + p/c^2 = 2\rho_0 \frac{\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{r^2 r_s}{R^3}\right)^{1/2}}$$

so daß

$$\frac{4\pi G}{c^2}\int_\infty^r \ldots =$$

$$\frac{8\pi G}{c^2}\rho_0\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2}\int_R^r dr'\, r' \frac{1}{\left(1-\frac{r'^2 r_s}{R^3}\right)\left[3\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{r_s r'^2}{R^3}\right)^{1/2}\right]}$$

mit $1 - \frac{r_s r^2}{R^3} =: y$

$$-2\frac{r_s}{R^3}\, r\, dr = dy \quad , \quad y_R = \left(1-\frac{r_s}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4\pi G}{c^2}\int_{\infty}^{r} \cdots =$$

$$- \frac{R^3}{2 r_S} \cdot \frac{8\pi G}{c^2}\, \varrho_0 \cdot y_R^{1/2} \cdot \int_{y_R}^{y_r} \frac{dy}{y\left[3 y_R^{1/2} - y^{1/2}\right]}$$

Setze $z := y/(9 \cdot y_R)$, dann

$$= - \underbrace{\frac{1}{r_S} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho_0 \frac{G}{c^2}}_{1/2} \cdot \underbrace{\int_{\frac{1}{9}}^{z_r} \frac{dz}{z\left[1 - \sqrt{z}\right]}}_{\ln(z) - 2\ln(1-\sqrt{z})}$$

$$= \ln\left[\frac{z}{(1-\sqrt{z})^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{z_r}{(1-\sqrt{z_r})^2} \cdot \frac{(1-\frac{1}{3})^2}{1/9}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left[\frac{4 z_r}{(1-\sqrt{z_r})^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{9}\, y/y_R}{\left[1 - \frac{1}{3}\sqrt{y/y_R}\right]^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{4y}{\left[3 y_R^{1/2} - y^{1/2}\right]^2}$$

$$= - \ln \frac{2 y^{1/2}}{\left[3 y_R^{1/2} - y^{1/2}\right]} \qquad (6.43)$$

Für $r < R$ ist $b(r) = \ln y^{-1/2}$

Also

$$a(r) = -b(r) + \frac{4\pi G}{c^2}\int_{\infty}^{r} \cdots$$

$$= -\left(\ln y^{-1/2} + \ln \frac{2y^{1/2}}{[3y_R^{1/2} - y^{1/2}]} \right)$$

$$= -\ln\left(\frac{2}{3y_R^{1/2} - y^{1/2}}\right)$$

$$= \ln \frac{1}{2}\left(3y_R^{1/2} - y^{1/2}\right)$$

$$= \ln\left\{\frac{1}{2}\left[3\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{r^2 r_s}{R^3}\right)^{1/2}\right]\right\}$$

Also endlich:

$$e^{2a(r)} = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[3\cdot\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{r^2 r_s}{R^3}\right)^{1/2}\right]^2 & \text{für } r \leq R \\ \left(1-\frac{r_s}{r}\right) & \text{für } r \geq R \end{cases} \tag{6.44}$$

Damit sind alle gesuchten Funktionen, $a(r)$, $b(r)$ und $p(r)$ für den Fall inkompressibler Sterne bestimmt.

Der Zentraldruck ist

$$p(0) = \varrho_0 c^2 \frac{1-\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2}-1} \qquad (6.45)$$

Der Nenner hat eine Nullstelle bei

$$\left(1-\frac{r_s}{R}\right) = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad R = \frac{9}{8} r_s \qquad (6.46)$$

Zum Vergleich: Der Druckverlauf für Newton'sche Sterne ergibt sich aus (6.39) durch Grenzübergang $c \to \infty$. Dann wird $r_s = \frac{1}{c^2} \to 0$ und wir haben in führender Ordnung

$$p^{(N)}(r) = \varrho_0 c^2 \frac{\left(1-\frac{1}{2}\frac{r^2 r_s}{R^3}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\frac{r_s}{R}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\varrho_0 c^2 \frac{r_s}{R}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{GM}{R}\varrho_0\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

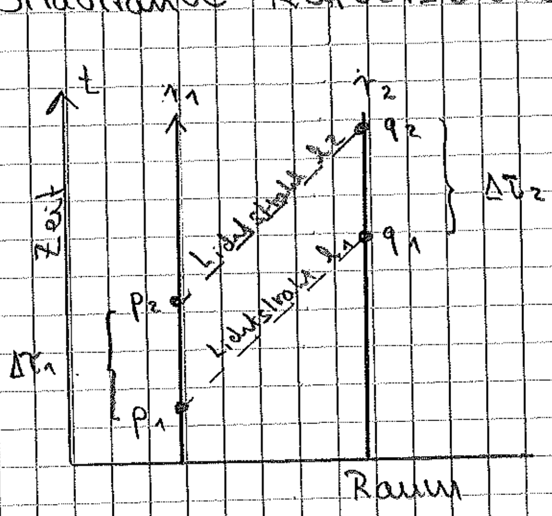
$$= \frac{2\pi}{3} G (\varrho_0 R)^2 \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (6.47)$$

Der Newtonsche Zentraldruck ist

$$p^N(0) = \frac{2\pi}{3} G (\varrho_0 R)^2 < \infty$$

bleibt also für inkompressible Sternmaterie immer endlich. ($\to$ neues Instabilitätsphänomen!)

Gravitative Rotverschiebung



Wegen Zeittranslationsinvarianz $t \to t + c$ ist der Lichtstrahl l_2 eine Translation von l_1

$$\Delta t_2 = t(q_2) - t(q_1) = t(p_2) - t(p_1) = \Delta t_1$$

Eigenzeiten stationärer Beobachter

$$\Delta\tau_1 = \left[g_{00}(r_1)\right]^{1/2} \Delta t_1$$

$$\Delta\tau_2 = \left[g_{00}(r_2)\right]^{1/2} \Delta t_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \left[\frac{g_{00}(r_1)}{g_{00}(r_2)}\right]^{1/2}$$

Ausgesandte Lichtphasenzyklen $= \nu_1 \cdot \Delta\tau_1$

= Empfangene Lichtphasenzyklen $= \nu_2 \, \Delta\tau_2$

$$\Rightarrow \quad \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \left[\frac{g_{00}(r_1)}{g_{00}(r_2)}\right]^{1/2}$$

Rotverschiebungsfaktor

$$z = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2} = \left[g_{00}(r_2) / g_{00}(r_1)\right]^{1/2} - 1 \qquad (6.48)$$

Mit $g_{00}(r_i) = \left(1 - \frac{r_s}{r_i}\right)^{1/2}$ für $r \geq R$

$$\Rightarrow \quad z = \left[\frac{1 - \frac{r_s}{r_2}}{1 - \frac{r_s}{r_1}}\right]^{1/2} - 1 \qquad (6.49)$$

Dies ist in r_1 / r_2 streng monoton fallend / steigend und divergent für $r_1 \searrow r_s$. Das maximale z ist also

$$z\left(r_1 = \tfrac{9}{8} r_s,\ r_2 = \infty\right)$$

$$= z_{max} = \left[\frac{1}{1 - \frac{8}{9}}\right]^{1/2} - 1 = 2 \qquad (6.50)$$

Bindungsenergie:

Die Innenraumlösung schließt sich stetig differenzierbar an die Außenraumlösung an, wobei

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

und $M = M(R) = 4\pi \int_0^r dr' \, r'^2 \rho(r')$

M ist die von außen durch den freien Fall von Testmassen messbare aktive gravitative Masse des Zentralkörpers. Diese ist nun nicht gleich dem Volumenintegral auf t = konst Flächen über ρ.

Das Volumenelement in der raumartigen Hyperfläche $t =$ konst ist

$$dV = e^{b(r)} r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Also ist das Volumenintegral von $\varrho \times c^2$ gleich

$$E_{int} := 4\pi \int_0^R \frac{\varrho(r')}{\left[1 - \frac{2GM(r')}{c^2 r'}\right]^{1/2}} r'^2 dr' > Mc^2$$

und deshalb

$$Mc^2 - E_{int} = 4\pi c^2 \int_0^R \left\{1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM(r')}{c^2 r'}}}\right\} \varrho(r') r'^2 dr'$$

Ist $\frac{GM(r)}{r c^2} \ll 1 \quad \forall \, r \in [0, R]$ so ist

dies in führender Ordnung gleich

$$Mc^2 - E_{int} = -\int dV \, G \frac{M(r')}{r'} \varrho(r') = E_{grav}$$

$=$ gravitative Bindungsenergie

$\Rightarrow$ aktive schwere Masse $= (E_{int} + E_{grav}) / c^2$

Für einen homogenen Stern ist

$$\frac{1}{c^2} E_{int} = 4\pi \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2 r_S}{R^3}}} \varrho(r)$$

$$= 4\pi \varrho_0 \left[\frac{R^3}{r_S}\right]^{3/2} \underbrace{\int_0^{\sqrt{r_S/R}} \frac{z^2 \, dz}{\sqrt{1 - z^2}}}_{\frac{1}{2}\left[\arcsin(x) - x\sqrt{1 - x^2}\right]}$$

$$z := r\sqrt{\frac{r_S}{R^3}}$$

Mit $\displaystyle\int \frac{dz\, z^2}{\left[1-z^2\right]^{1/2}}$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(z) - z\,(1-z^2)^{1/2}\right]$$

$$\frac{1}{c^2} E_{int} = 4\pi \varrho_0 R^3 \left(\frac{R}{r_s}\right)^{3/2} \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(z) - z\,(1-z^2)^{1/2}\right]_0^{\sqrt{r_s/R}}$$

$$= \frac{1}{2}\, 4\pi \varrho R^3 \left(\frac{R}{r_s}\right)^{3/2} \left[\sin^{-1}\left(\frac{r_s}{R}\right)^{1/2} - \left(\frac{r_s}{R}\right)^{1/2}\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} M \left(\frac{R}{r_s}\right)^{3/2} \left[\sin^{-1}\left(\frac{r_s}{R}\right)^{1/2} - \left(\frac{r_s}{R}\right)^{1/2}\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} M \left(\frac{R}{r_s}\right)^{3/2} \left[\frac{2}{3}\left(\frac{r_s}{R}\right)^{3/2} + \frac{1}{5}\left(\frac{r_s}{R}\right)^{5/2} + \mathcal{O}\left(\frac{7}{2}\right)\right]$$

$$= M\left[1 + \frac{3}{10}\frac{r_s}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{r_s}{R}\right)^2\right]$$

$$= M\left[1 + \frac{3}{5}\frac{GM}{c^2 R} + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \quad E_{grav} = Mc^2 - E_{int} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} + \cdots$$

$\Rightarrow$ Newtonisches Resultat in führender Ordnung

Für den kleinsten stabilen Stern von $R = \frac{9}{8} r_s$ gilt

$$E_{int} = Mc^2 \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{9}{8}\right)^{3/2} \left[\sin\left(\frac{8}{9}\right)^{1/2} - \left(\frac{8}{9}\right)^{1/2} \frac{1}{3}\right]$$

$$= 1{,}641 \times Mc^2$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{E_{grav} = Mc^2 - E_{int} = -0{,}641\; Mc^2}}$.

= Maximale Bindungsenergie eines homogenen Sterns.