Schwarzschild de Sitter

$$g = e^{2a(r,t)} c^2 dt^2 - e^{2b(r,t)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

$$= \theta^0 \otimes \theta^0 - \sum_{a=1}^{3} \theta^a \otimes \theta^a$$

$$\theta^0 = e^a \, c\,dt \quad , \quad \theta^2 = \theta^\theta = r\,d\theta$$

$$\theta^1 = \theta^r = e^b \, dr \quad , \quad \theta^3 = \theta^\varphi = r \sin\theta \, d\varphi$$

Bezogen auf $\{\theta^\mu\}$ sind die Komponenten des Einstein-Tensors gegeben durch

$$G_{00} = r^{-2} [1 - e^{-2b}] + \frac{2b'}{r} e^{-2b} = r^{-2} [r(1-e^{-2b})]'$$

$$G_{01} = (2\dot{b}/r) \, e^{-(a+b)}$$

$$G_{02} = G_{03} = 0$$

$$G_{11} = -r^{-2} [1 - e^{-2b}] + \frac{2a'}{r} e^{-2b}$$

$$G_{12} = G_{13} = 0$$

$$G_{22} = G_{33} = -e^{-2a} [\ddot{b} + \dot{b}^2 - \dot{a}\dot{b}]$$
$$+ e^{-2b} [a'' + a'^2 - a'b' + r^{-1}(a'-b')]$$

$$G_{23} = 0$$

Einstein-Gleichung mit kosm. Konstante

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Hier ist T der Energie-Impulstensor einer idealen Flüssigkeit

$$T_{\mu\nu} = \varrho u_\mu u_\nu + \left(\frac{u_\mu u_\nu}{c^2} - g_{\mu\nu}\right) p$$

$$= (\varrho + p/c^2) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$$

für $r < R$ und $T_{\mu\nu} = 0$ sonst.

Vakuum Lösung

- $G_{01} = 0 \Rightarrow \dot{b} = 0 \Rightarrow b = b(r)$
- $G_{00} + G_{11} = (a+b)' \frac{2}{r} e^{-2b} = (\eta_{00} + \eta_{11}) \Lambda = 0$

$\Rightarrow (a+b)' = 0 \Rightarrow a(r,t) = -b(r) + f(t)$

- $G_{00} = \Lambda \eta_{00} = \Lambda \Leftarrow$

$[r(1 - e^{-2b})]' = \Lambda r^2$

$\Leftarrow \quad r(1 - e^{-2b}) = \frac{\Lambda}{3} r^3 + 2m$

$\Leftrightarrow \quad e^{-2b} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2$

Mit $a' = -b'$ und $\dot{b} = 0$ wird

$$G_{22} = e^{-2b}\left[-b'' + b'^2 + b'^2 - \frac{2}{r} b'\right]$$

$$= -\frac{1}{2r}\left[r\left(1 - e^{-2b}\right)\right]''$$

$$= -\frac{1}{2r}\left[r^2 G_{00}\right]'$$

Ist $G_{00} = \Lambda$ dann

$$G_{22} = -\Lambda$$

Also impliziert die 00-Komponente der Einstein-Gleichung die 22- und 33-Komponente, wie zuvor.

Damit hat man nach Redefinition der Zeitkoordinate

$$dT = e^{f(t)}\, dt$$

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) c^2 dt^2$$

$$- \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d^2\Omega$$

Wir nehmen $T \in \Gamma T^2_0(M)$, d.h.

$$T = T^{\mu\nu}\, e_\mu \otimes e_\nu$$

$$= (\rho + p/c^2)\, u \otimes u - g^{-1} p$$

$$= (\rho c^2 + p)\, e_0 \otimes e_0 - g^{-1} p$$

mit $g^{-1} = e_0 \otimes e_0 - \sum_{a=1}^{3} e_a \otimes e_a$

Also $T = \rho c^2\, e_0 \otimes e_0 + p \sum_{a=1}^{3} e_a \otimes e_a$

$$\nabla \cdot T = \mathrm{Spur}_{(1,2)}(\nabla T)$$

$$\nabla T = d(\rho c^2 + p) \otimes e_0 \otimes e_0 - dp \otimes g^{-1}$$

$$+ (\rho c^2 + p)\left[\omega^\mu{}_0 \otimes e_\mu \otimes e_0 + \omega^\mu{}_0 \otimes e_0 \otimes e_\mu \right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{Spur}_{12}(\nabla T) = e_0(\rho c^2)\, e_0 + \sum_{a=1}^{3} e_a(p)\, e_a$$

$$+ (\rho c^2 + p)\left[\omega^\mu{}_0(e_\mu)\, e_0 + \omega^a{}_0(e_0)\, e_a \right]$$

$$= \left[c^2 e_0(\rho) + (\rho c^2 + p)\, \omega^\mu{}_0(e_\mu) \right] e_0$$

$$+ \left[e_a(p) + (\rho c^2 + p)\, \omega^a{}_0(e_0) \right] e_a$$

Nun ist $\omega^r{}_0 = e^{-b} a' \theta^0 + e^{-a} \dot{b}\, \theta^r$

$$\omega^\theta{}_0 = \omega^\varphi{}_0 = 0$$

Also $\omega^\mu{}_0(e_\mu) = \omega^r{}_0(e_r) = e^{-a}\dot{b} = e_0(b)$

$\omega^r{}_0(e_0) = e^{-b} a' = e_r(a)$

Spur$_{(1,2)}$ $(\nabla T) =$

$[c^2\, e_0(\varrho) + (\varrho c^2 + p)\, e_0(b)]\, e_0$

$+ [\, e_r(p) + (\varrho c^2 + p)\, e_r(a)\,]\, e_r$

$+ e_\theta(p)\, e_\theta + e_\varphi(p)\, e_\varphi = 0$

$\Rightarrow e_\theta(p) = e_\varphi(p) = 0$

$T(e_0, e_r) = 0 \Rightarrow G_{01} = 0 \Rightarrow \dot{b} = 0$

$\Rightarrow e_0(b) = 0 \Rightarrow e_0(\varrho) = 0$

$\Rightarrow$ Koeff. von e_0 ist $= 0$

Einzig verbleibende Gleichung: Koeff. von $e_r = 0$

$e_r(p) + (\varrho c^2 + p)\, e_r(a) = 0$

bzw $\quad a' = -\, p' / (\varrho c^2 + p) \qquad (6a.23)$

Einstein-Gleichung in Materie

$(0,1)$ $\quad T_{01} = 0 \Rightarrow G_{01} = 0 \Rightarrow \dot{b} = 0$

$\Rightarrow b = b(r)$

$(0,0)$ $\quad G_{00} = \kappa T_{00} + \Lambda$

$$r^{-2}\left[r\left(1-e^{-2b}\right)\right]' = \kappa \rho c^2 + \Lambda$$

$$\left[r\left(1-e^{-2b}\right)\right]' = \left(\kappa\rho c^2 + \Lambda\right) r^2$$

$$r\left(1-e^{-2b}\right) = \frac{1}{3}\Lambda r^3 + \kappa c^2 \int_0^r dr'\, \rho(r')\, r'^2$$

$$= \frac{\Lambda}{3} r^3 + \frac{2G}{c^2} M(r)$$

mit
$$M(r) := 4\pi \int_0^r dr'\, r'^2 \rho(r') \qquad (6a.25)$$

Also
$$e^{-2b(r)} = 1 - 2G\frac{M(r)}{c^2 r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \qquad (6a.26)$$

$(1,1)$ $\quad G_{11} + G_{00} = \frac{2}{r} e^{-2b} (a' + b')$

$$= \kappa\left(\rho c^2 + p\right)$$

(Λ hebt sich bei dieser Kombination heraus).

$$\Rightarrow (a+b)' = \frac{r}{2}\kappa e^{2b}\left(\rho c^2 + p\right)$$

$$= \frac{4\pi G}{c^2} e^{2b}\, r\left(\rho + p/c^2\right) \qquad (6a.29)$$

Aus (6a.26) folgt durch Ableiten nach r

$$-2b' e^{-2b} = -2 \frac{G}{c^2} \left(\frac{M}{r}\right)' - \frac{2}{3} \Lambda r$$

$$\Rightarrow b' = e^{2b} \frac{G}{c^2} \left(\frac{M}{r}\right)' + e^{2b} \frac{1}{3} \Lambda r$$

Eingesetzt in (6a.29)

$$a' = e^{2b} \left\{ \frac{4\pi G}{c^2} r (\rho + p/c^2) - \frac{G}{c^2} \left(\frac{M}{r}\right)' - \frac{1}{3} \Lambda r \right\}$$

Aus (6a.25): $- \frac{G}{c^2} \frac{M'}{r} = - \frac{G}{c^2} 4\pi r \rho$

$$\Rightarrow a' = e^{2b} \left\{ \frac{4\pi G}{c^2} r \frac{p}{c^2} + \frac{G}{c^2} \frac{M}{r^2} - \frac{1}{3} \Lambda r \right\}$$

Mit (6a.23) ersetzen wir a' auf der linken Seite und benutzen außerdem (6a.23)

$$\Rightarrow -p' = G \frac{M + 4\pi r^3 p/c^2 - \frac{1}{3} \frac{c^2 \Lambda}{G} r^3}{r^2 \left[1 - 2G \frac{M}{c^2 r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right]} \times$$

$$\times (\rho + p/c^2)$$

TOV-Gleichung mit kosm. Konstante.

In einem gewissen Sinne kann man den Fall $\Lambda \neq 0$ auf den Fall $\Lambda = 0$ zurückführen, jedenfalls zum Teil.

Wegen

$$G_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{\mu\nu}\right)$$

kann man Λ als Teil eines EI-Tensors auffassen:

$$T^{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\kappa} g = \frac{\Lambda}{\kappa}\left(e_0 \otimes e_0 - \sum_{a=1}^{3} e_a \otimes e_a\right)$$

$$= \rho_\Lambda c^2 \, e_0 \otimes e_0 + p_\Lambda \sum_{a=1}^{3} e_a \otimes e_a$$

mit $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{c^2 \kappa}$, $p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{\kappa}$

$$M_\Lambda = 4\pi \int_0^r \rho_\Lambda r'^2 \, dr' = \frac{4\pi}{3} \rho_\Lambda r^3$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{\Lambda}{c^2 \kappa} r^3$$

$$\Rightarrow M_\Lambda + 4\pi r^3 p_\Lambda / c^2 = \frac{4\pi}{3} \frac{\Lambda}{c^2 \kappa} r^3 - 4\pi r^3 \frac{\Lambda}{c^2 \kappa}$$

$$= -\frac{2}{3} 4\pi \frac{\Lambda}{c^2 \kappa} r^3 = -\frac{1}{3} \frac{c^2 \Lambda}{G} r^3$$

Außerdem

$$-2G \frac{M_\Lambda}{c^2 r} = -\frac{8\pi}{3} \frac{G \Lambda}{c^4 \kappa} r^2 = -\frac{\Lambda}{3} r^2$$

und

$$\rho_\Lambda + p_\Lambda / c^2 = 0 .$$

Also entsteht die TOV-Gleichung mit Λ aus der ohne Λ durch die Ersetzung

$$\rho \to \rho + \rho_\Lambda \quad , \quad p \to p + p_\Lambda$$

wobei erstere auch

$$M \to M + M_\Lambda$$

nach sich zieht. Da $p'_\Lambda = 0$ wird die linke Seite der TOV-Gleichung nicht geändert.

Spezialfall: Inkompressible Materie

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 > 0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3 = M \frac{r^3}{R^3} & \text{für } r \leq R \\ \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3 = M & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

Für $r \leq R$ werten wir nun die TOV-Gleichung mit Λ weiter aus

$$= M + 4\pi r^3 p/c^2 - \frac{1}{3} \frac{c^2 \Lambda}{G} r^3$$

$$= \left(\frac{4\pi}{3} \rho_0 + 4\pi \frac{p}{c^2} - \frac{1}{3} \frac{c^2 \Lambda}{G} \right) r^3$$

$$= \frac{4\pi}{c^2} r^3 \left(p + \frac{1}{3} \rho_0 c^2 - \frac{2}{3} \frac{\Lambda}{\kappa} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{p'}{(p+c^2\varrho_0)(p+\frac{1}{3}\varrho_0 c^2-\frac{2}{3}\frac{\Lambda}{\kappa})}$$

$$= -\frac{4\pi G r}{c^4}\left[1-\frac{8\pi G\varrho_0 r^2}{3c^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right]$$

bzw

$$\frac{\hat{p}'}{(\hat{p}+c^2\hat{\varrho}_0)(\hat{p}+\frac{1}{3}\hat{\varrho}_0 c^2)} = -\frac{4\pi G}{c^4}r\left[1-\frac{8\pi G\hat{\varrho}_0 r^2}{3c^2}\right]$$

mit $\hat{\varrho}_0 := \varrho_0 + \frac{\Lambda}{\kappa c^2}$

$\hat{p} := p - \frac{\Lambda}{\kappa}$

Das ist genau die Gleichung des Falls $\Lambda = 0$ nur mit $\hat{\varrho}_0$ und $\hat{p}$ statt ϱ_0 und p. Allerdings müssen wir beachten, daß der Rand des Sterns für $p(R)=0$, also $\hat{p}(R)=-\Lambda/\kappa$ gegeben ist.

Setzt man $X := \left[\frac{8\pi G\hat{\varrho}_0}{3c^2}\right]^{1/2} r$

so folgt wie zuvor

$$\frac{d\hat{p}}{(\hat{p}+\hat{\varrho}_0 c^2)} - \frac{d\hat{p}}{\hat{p}+\hat{\varrho}_0 c^2/3} = \frac{X\,dX}{1-X^2}$$

Integration von $r' = r$ nach $r' = R$, wobei R der Rand des Sterns ist bei dem $p(R) = 0$ also $\hat{p}(R) = -\Lambda/\kappa$, ergibt

$$\ln \left. \frac{\hat{p} + \hat{\rho}_0 c^2}{\hat{p} + \hat{\rho}_0 c^2/3} \right|_r^R = -\frac{1}{2} \ln (1 - x^2) \Big|_r^R$$

$$\underbrace{\frac{(\hat{\rho}_0 - \rho_\Lambda)}{\frac{1}{3}\hat{\rho}_0 - \rho_\Lambda}} \quad \frac{\hat{p}(r) + \hat{\rho}_0 c^2/3}{\hat{p}(r) + \hat{\rho}_0 c^2} = \left(\frac{1 - x_r^2}{1 - x_R^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\rho_0}{\frac{1}{3}\rho_0 - \frac{2}{3}\rho_\Lambda} \quad \frac{p(r) + \rho_0 c^2/3 - \frac{2}{3}\rho_\Lambda c^2}{p(r) + \rho_0 c^2}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - 2\frac{\rho_\Lambda}{\rho_0}\right)} \quad \frac{3\, p(r) + \rho_0 c^2 \left(1 - 2\frac{\rho_\Lambda}{\rho_0}\right)}{p(r) + \rho_0 c^2}$$

$$(p(r) + \rho_0 c^2) \quad \left(1 - 2\frac{\rho_\Lambda}{\rho_0}\right) \left(\quad\right)^{1/2}$$

$$= 3\, p(r) + \left(1 - 2\frac{\rho_\Lambda}{\rho_0}\right) \rho_0 c^2$$

$$p(r) \left\{ \left(1 - 2\frac{\rho_\Lambda}{\rho_0}\right) \left(\quad\right)^{1/2} - 3 \right\}$$

$$= \rho_0 c^2 \quad \left(1 - 2\frac{\rho_\Lambda}{\rho_0}\right) \left(1 - \left(\quad\right)^{1/2}\right)$$

$$p(r) = \rho_0 c^2 \quad \frac{\left(\quad\right)^{1/2} - 1}{\frac{3}{1 - 2\frac{\rho_\Lambda}{\rho_0}} - \left(\quad\right)^{1/2}}$$

$$(\;)^{1/2} = \left[\frac{1-\frac{\hat{r}_s r^2}{R^3}}{1-\frac{\hat{r}_s}{R}}\right]^{1/2}, \quad \hat{r}_s = \frac{2G\hat{M}}{c^2}$$

$$p(r) = \varrho_0 c^2 \frac{\left(1-\frac{\hat{r}_s r^2}{R^3}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{\hat{r}_s}{R}\right)^{1/2}}{\frac{3}{1-\frac{\varrho_\Lambda}{\varrho_0}} \cdot \left(1-\frac{\hat{r}_s}{R}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{\hat{r}_s r^2}{R}\right)^{1/2}} \qquad (6a.39)$$

Dies unterscheidet sich von (6.39) nur durch den Term $(1-\varrho_\Lambda/\varrho_0)$ der den Druck im Sterninnern kleiner macht für $\Lambda > 0$ und größer für $\Lambda < 0$.

Der metrische Koeffizient $e^{2b(r)}$ folgt aus (6a.26) wegen $M(r) = M\frac{r^3}{R^3}$ für $r \leq R$

$$e^{-2b(r)} = \begin{cases} \left(1-\left(\frac{r_s}{R^3}+\frac{\Lambda}{3}\right)r^2\right) & \text{für } r \leq R \\ \left(1-\frac{r_s}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right) & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

Innerhalb des Sterns herrscht die räumliche Metrik (auf den Flächen t = konst)

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2$$

mit $k = \left(\frac{r_s}{R^3}+\frac{\Lambda}{3}\right)$

Der Druck bei $r=0$ divergiert falls

$$3\left(1-\frac{r_s}{R}\right)^{1/2} = \left(1-\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)$$

$$9\left(1-\frac{r_s}{R}\right) = \left(1-\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2 = 1-8\varepsilon$$

$$\varepsilon = \left[1-\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2\right]\Big/8$$

$$1-\frac{r_s}{R} = \frac{1}{9} - \frac{8\varepsilon}{9} \quad \Rightarrow -\frac{r_s}{R} = -\frac{8}{9}(1+\varepsilon)$$

$$R_* = r_s\,\frac{9}{8}(1+\varepsilon)^{-1}$$

Damit $p(0) < \infty$ muß also gelten

$$R > \frac{9}{8}\, r_s\, (1+\varepsilon)^{-1}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{8}\left[1-\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2\right]$$

Mit $r = k^{-1/2}\sin\psi$ ist die Metrik

$$ds^2 = k^{-1}\left[d\psi^2 + \sin^2\psi\, d^2\Omega\right]$$

Kalotte auf S^3 mit Radius

$$R\left(\frac{r_s}{R}+\frac{\Lambda}{3}R^2\right)^{-1/2} = R\left(\frac{R}{r_s}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\Lambda R^3}{3 r_s}\right)^{-1/2}$$

und maximalem Breitenwinkel

$$\psi_{max} = \sin^{-1}\psi_{max} = \left(\frac{r_s}{R}+\frac{R^2\Lambda}{3}\right)^{1/2} = \left(\frac{8}{9}(1+\varepsilon)+\frac{R^2\Lambda}{3}\right)^{1/2}$$