

# Raumgeometrie der "äußeren und inneren Schwertschildlösung"

Die  $t = \text{const.}$  Hyperflächen tragen die  
Riemannsche Metrik

$$g_R := \begin{cases} \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{rs}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) & r \geq R \\ \frac{-dr^2}{1 - \frac{r^2 rs}{R^3}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) & r < R \end{cases}$$

Zur Veranschaulichung beschränken wir uns  
auf die 2-dimensionale Ebene  $t = \text{const.}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$   
mit der intrinsischen Flächengeometrie

$$g_R := f^2(r) dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (7.1a)$$

$$f^2 = \begin{cases} 1 / \left(1 - \frac{rs}{r}\right) & \text{für } r \geq R \quad (7.1b) \\ 1 / \left(1 - \frac{r^2 rs}{R^3}\right) & \text{für } r < R \quad (7.1c) \end{cases}$$

Wir suchen nach einer rotations-symmetrischen  
Einbettung einer Fläche  $\mathbb{R}^2 \supseteq F \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\tau, \varphi) \mapsto (z(\tau), r, \varphi) \quad (7.2)$$

so daß die von  $\mathbb{R}^2$  auf das Bild der  
Einbettung induzierte Geometrie gleich ist  
(G.51).

Also

$$\begin{aligned}
 g_{\text{ind}} &= d^2 z(\tau) + d\tau^2 + \tau^2 dy^2 \\
 &= (1 + z'^2) d\tau^2 + \tau^2 dy^2 \\
 &\stackrel{!}{=} \rho^2(\tau) d\tau^2 + t^2 dy^2 \quad (7.3)
 \end{aligned}$$

Also

$$z' = \pm (\rho^2 - 1)^{1/2} \quad (7.4)$$

Für  $\tau \gg R$ :

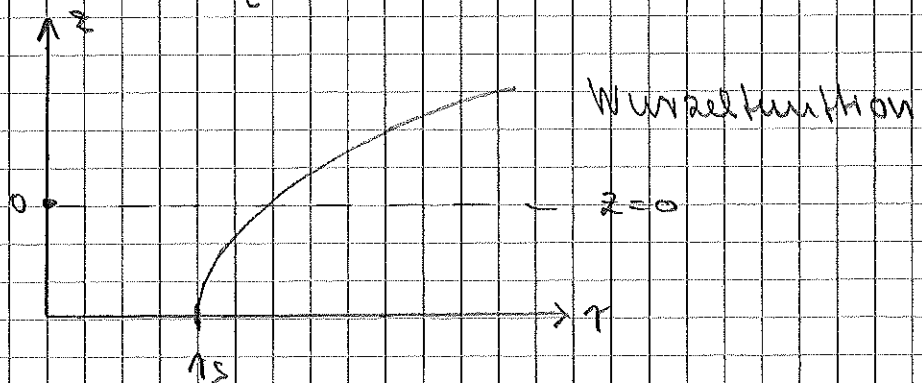
$$\begin{aligned}
 z' &= \pm \left[ \frac{\tau_s / \tau}{1 - \frac{\tau_s}{\tau}} \right]^{1/2} = \pm \left[ \frac{\tau_s}{\tau - \tau_s} \right]^{1/2} \\
 &= \pm \left[ \frac{1}{\frac{\tau}{\tau_s} - 1} \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$dz = \pm \tau_s \left[ \frac{1}{\frac{\tau}{\tau_s} - 1} \right]^{1/2} d\left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)$$

$$z - z_0 = \pm 2\tau_s \left[ \frac{\tau}{\tau_s} - 1 \right]^{1/2}$$

Wähle  $z=0$  für  $\tau=R$  und obigen Ansatz, $\Rightarrow$ 

$$z = 2\tau_s \left\{ \left[ \frac{\tau}{\tau_s} - 1 \right]^{1/2} - \left[ \frac{R}{\tau_s} - 1 \right]^{1/2} \right\} \quad (7.5)$$



Für  $r \leq R$

$$z' = \pm \left[ \frac{r^2 \tau_s / R^3}{1 - r^2 \tau_s / R^3} \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow dz = \pm \left[ \frac{r^2 \tau_s / R^3}{1 - r^2 \tau_s / R^3} \right]^{1/2} dr$$

$$= \pm \left[ \frac{1}{1 - \frac{r^2 \tau_s}{R^3}} \right]^{1/2} \left[ \frac{\tau_s}{R^3} \right]^{1/2} r dr$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2 \tau_s}{R^3}}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^3}{\tau_s}} d\left(\frac{r^2 \tau_s}{R^3}\right)$$

$$\Rightarrow z - z_0 = \pm R \sqrt{\frac{R}{\tau_s}} \sqrt{1 - \frac{r^2 \tau_s}{R^3}}$$

Wähle  $z = 0$  für  $r = R$  und obigen (negativen) Ast, also

$$z_0 = R \sqrt{\frac{R}{\tau_s}} \sqrt{1 - \frac{\tau_s}{R}} = R \sqrt{\frac{R}{\tau_s} - 1} \quad (7.6)$$

$$z = R \left\{ \sqrt{\frac{R}{\tau_s} - 1} - \sqrt{\frac{R}{\tau_s} - \frac{r^2}{R^2}} \right\}$$

$$\text{Wegen } (z - z_0)^2 + r^2 = \frac{R^3}{\tau_s} \quad (7.7)$$

$\Rightarrow$  Kugel einer Kugel vom Radius

$$R \sqrt{\frac{R}{\tau_s}} \quad \text{und Mittelpunkt}$$

$$(z_0, r_0) = \left( R \sqrt{\frac{R}{\tau_s} - 1}, 0 \right)$$

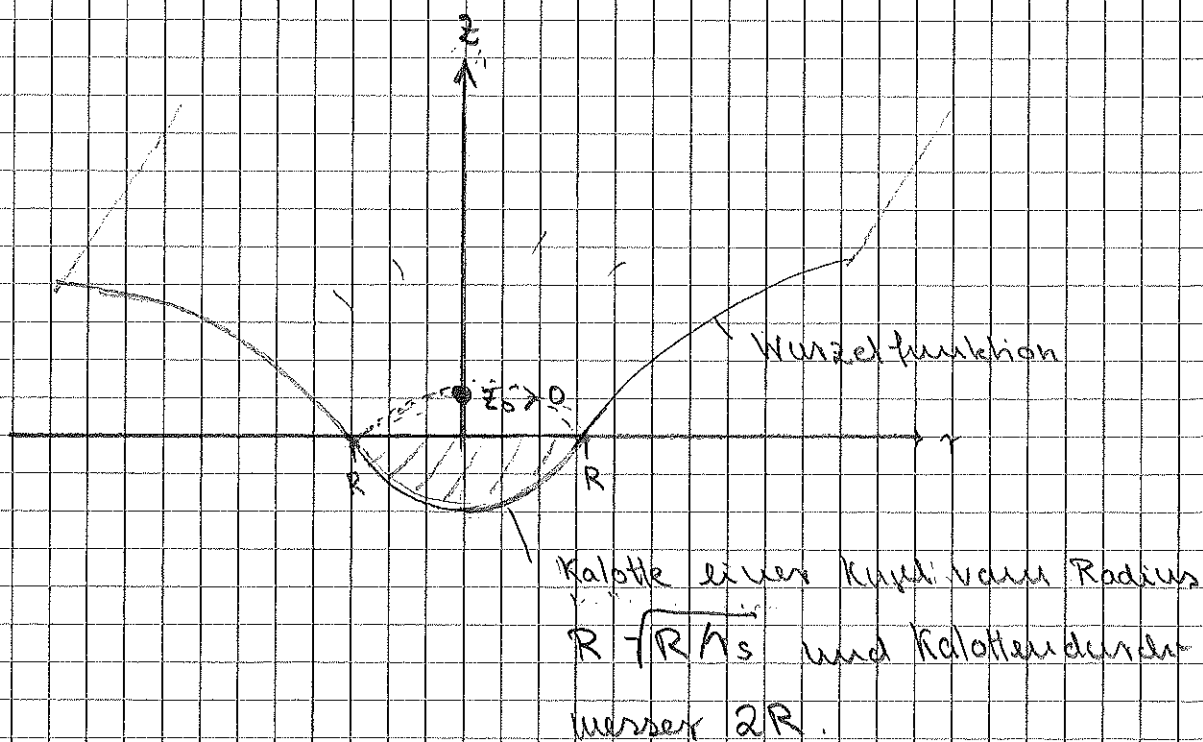
(7.8)

Der Äquatoriale Schnitt  $\theta = \frac{\pi}{2}$  durch die äußere und innere Schwarzschildgeometrie der Flächen  $t = \text{const.}$  ist also metrisch bzw. durch folgende Einbettung  $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  repräsentiert

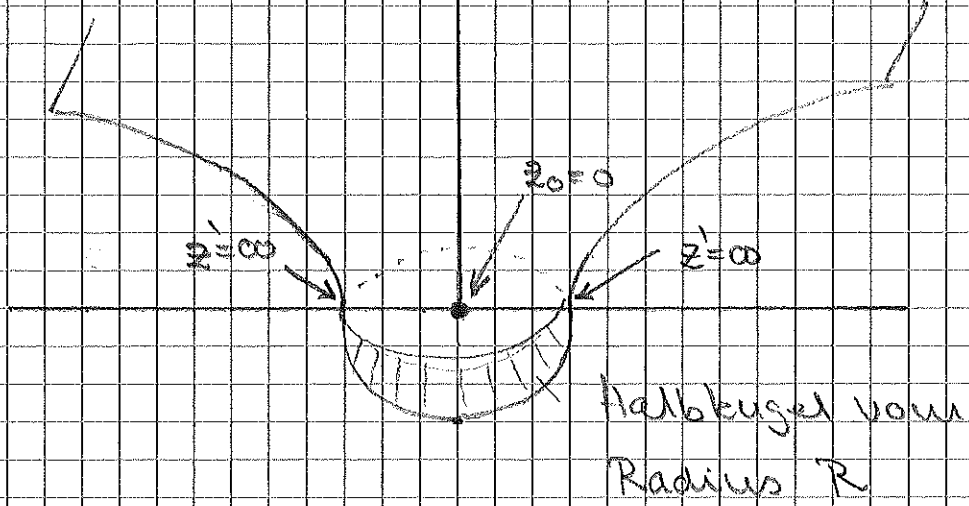
$$z(r) = \begin{cases} -R \left\{ \left( \frac{R}{r_s} - \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} - \left( \frac{R}{r_s} - 1 \right)^{1/2} \right\} & r \leq R \\ 2r_s \left\{ \left( \frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} - \left( \frac{R}{r_s} - 1 \right)^{1/2} \right\} & r > R \end{cases} \quad (7.9)$$

Beachte, daß per Konstruktion für beide Ausdrücke gilt (beide Mal  $z' = + \dots$  gewählt)

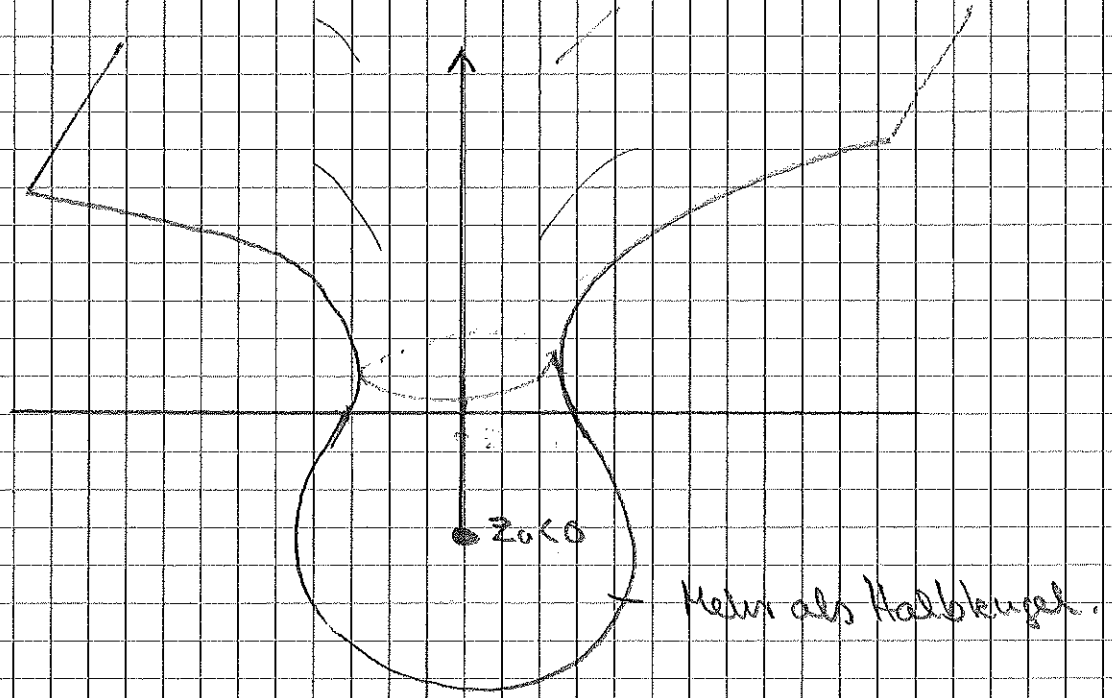
$$z(R) = 0, \quad z'(R) = \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{r_s} - 1}}$$



Extremfall:  $R=r_s$

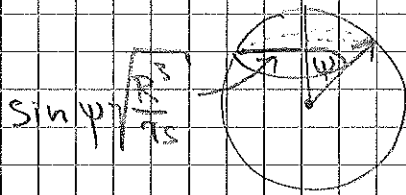


Überextremes Fall (nicht existent)



Dass die Innenraummetrik lokal die einer  $S^2$  ist hatte man auch sofort so sehen können:

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{dr^2}{1 - \frac{2\tau_s r}{R^3}} + r^2 d^2\Omega \\
 &\stackrel{L}{=} d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \\
 &= \frac{R^3}{\tau_s} \left[ \frac{dz^2}{1-z^2} + z^2 d^2\Omega \right], \quad z = r \left( \frac{\tau_s}{R^3} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{R^3}{\tau_s} \left[ d\varphi^2 + \sin^2\varphi d^2\Omega \right], \quad z = \sin\varphi \\
 &= \frac{R^3}{\tau_s} \left[ d\varphi^2 + \sin^2\varphi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] \quad (7.10)
 \end{aligned}$$



Mitte der  $S^3$  vom Radius  $R$  ( $R/\tau_s$ )<sup>1/2</sup> in Polarwinkel  $\varphi$  und  $(\theta, \varphi)$  für Breiten-sphärenwinkel.

Da  $R > \frac{9}{8}\tau_s$  erstreckt sich die Kalotte maximal zum Breiten-Winkel  $\varphi_{\max}$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\max} &= \sin^{-1} \left[ r_{\max} \left( \frac{\tau_s}{R^3} \right)^{1/2} \right], \quad r_{\max} = R \\
 &= \sin^{-1} \left( \frac{\tau_s}{R} \right)^{1/2} = \sin^{-1} \left( \frac{8}{9} \right)^{1/2} \\
 &= \sin^{-1} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \\
 &\approx 70.5^\circ
 \end{aligned}$$

Größere Teile können mit Materie „gefüllt“ werden falls  $\Lambda > 0$  (pos. kosm. Konstante)

Bewegung frei fallender Testteilchen  
in der äußeren Schwarzschildgeometrie

$$g = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 d\Omega^2$$

Energie funktional

$$E = \frac{1}{2} \int \left[ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right] d\lambda \quad (7.11)$$

Variationen:  $\delta E = 0$

$$\theta: (r\dot{\theta})^\cdot = r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \quad (7.12)$$

=> Ist Anfangs  $\theta = \frac{\pi}{2}$  und  $\dot{\theta} = 0$ , so auch  $\ddot{\theta} = 0$ . Gleichung wird gelöst durch  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  
d.h. Teilchen bleibt in Äquatorialebene

$t$ : zykl. Koordinate

$$\Rightarrow c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = \tilde{E} = \text{konst.} \quad (7.13)$$

Für massive Teilchen ist  $\tilde{E} = \text{Energie} / \text{Ruhmasse}$

$\varphi$ : zykl. Koordinate

$$\Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = \lambda = \text{konst.} \quad (7.14)$$

Für massive Teilchen ist  $\lambda = \text{Drehimpuls} / \text{Ruhmasse} = 2 \times \text{Flächenkonstante}$

Statt Gleichung für  $\tau$  verwendet man

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = K = \begin{cases} c^2 & \text{für massive Teilchen} \\ 0 & \text{für Licht} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = K$$

Eingeschränkt auf  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , d.h.  $\dot{\theta} = 0$ , und mit

$$\dot{t} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} \frac{\dot{r}^2}{c^4}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{r^4} l^2$$

ist

$$\tau + \text{Veff}(r) = \frac{E^2}{c^2} \quad (7.15)$$

mit

$$\text{Veff}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + K\right) \quad (7.16)$$

$$= K - \frac{K r_s}{r} + \frac{l^2}{r^2} - \frac{r_s l^2}{r^3}$$

↑ ↑ ↑ ↑

Konst. Potential Drehimpulsbarriere Rel. Korrekturen  $\sim \dot{c}^2$

$$\begin{aligned} \text{Veff}(r) &= \frac{K r_s}{r^2} - 2 \frac{l^2}{r^3} + 3 \frac{r_s l^2}{r^4} \\ &= \frac{1}{r^4} (r^2 r_s K - 2 r l^2 + 3 r_s l^2) \end{aligned} \quad (7.17)$$

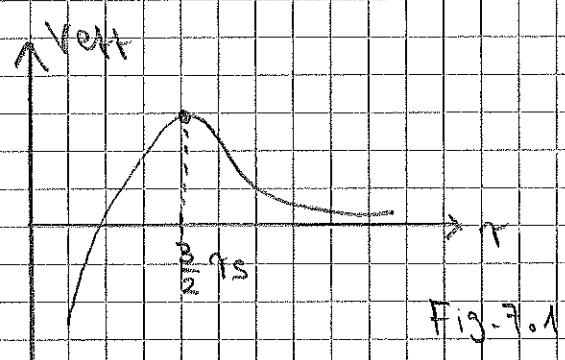


1. Fall  $K=0$  (Licht)

$$V_{eff}(r) = 0 \Leftrightarrow$$

$$r_{max} = \frac{3}{2} r_s = 3m \quad \text{Maximum.} \quad (7.18)$$

$\Rightarrow$  Es existieren instabile Kreisbahnen für Licht bei  $r = \frac{3}{2} r_s$ , aber keine weiteren gebundenen Orbits



2. Fall  $K=c^2$

$$V_{eff}(r) = 0 \Leftrightarrow r^2 - 2r \frac{l^2}{r_s K} + 3 \frac{l^2}{K} = 0$$

$$r_{1/2} = \frac{l^2}{r_s K} = \left[ \left( \frac{l^2}{r_s K} \right)^2 - 3 \frac{l^2}{K} \right]^{1/2}$$

$$= \frac{l^2}{r_s K} \left\{ 1 \pm \left[ 1 - 3 \frac{K r_s^2}{l^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (7.19)$$

$\Rightarrow$  Unterhalb

$$l = l_{krit} := \sqrt{3K} r_s \quad (7.20)$$

existieren keine Extrema und  $V_{eff}$  ist streng monoton steigend

Für  $l > l_{krit}$  existieren zwei Extrema

$$\tau_{max} = 3\tau_s \left( \frac{l}{l_{krit}} \right)^2 \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{l_{krit}}{l} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (7.21a)$$

$$\tau_{min} = 3\tau_s \left( \frac{l}{l_{krit}} \right)^2 \left\{ 1 + \left[ 1 - \left( \frac{l_{krit}}{l} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (7.21b)$$

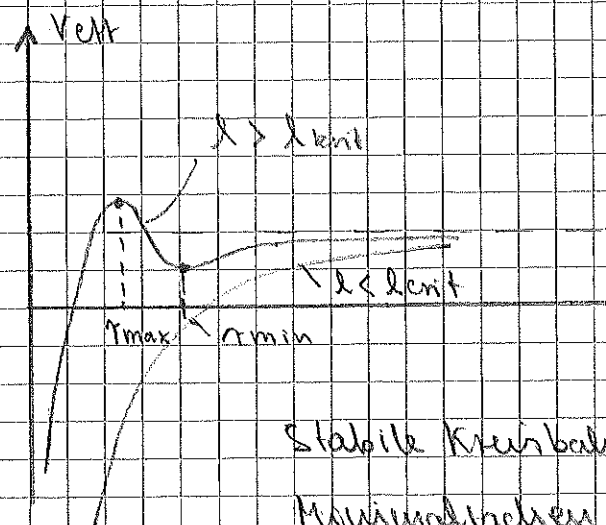
Beachte  $\tau_{max} < \tau_{min}$

Für  $l = l_{krit}$  ist  $\tau_{max} = \tau_{min} = 3\tau_s$ ,  
für  $l > l_{krit}$  fällt / wächst  $\tau_{max} / \tau_{min}$   
monoton mit asymptotischen Werten

$$\tau_{max} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \tau_s$$

$$\tau_{min} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$$

$\tau_{max}: (l_{krit}, \infty) \rightarrow (3\tau_s, \frac{3}{2}\tau_s)$  fallend  
 $\tau_{min}: (l_{krit}, \infty) \rightarrow (3\tau_s, \infty)$  steigend



Stabile Kreisbahnen existieren bis zu  
Minimalabständen von  $3\tau_s = l_{krit}$  stabile  
circular Orbit (LSO). Gebundene

Bahnen können bis auf  $\frac{3}{2}\tau_s$  zum Zentrum  
herankommen - aber nicht näher  $\tau_s$ .

Wir bestimmen noch das Drehimpulsintervall für das

$$V_{\text{eff}}(\tau_{\text{max}}) < V_{\text{eff}}(\tau = \infty) \quad (*)$$

also der Wert des Maximums unterhalb des Wertes bei unendlich liegt

(\*) ist äquivalent zu

$$K - K \frac{\tau_s}{\tau_{\text{max}}^3} + \frac{l^2}{\tau_{\text{max}}^2} - \frac{\tau_s l^2}{\tau_{\text{max}}^3} < K$$

$$\Leftrightarrow - \frac{K \tau_s}{\tau_{\text{max}}^3} \left\{ \tau_{\text{max}}^2 - \frac{l^2}{K \tau_s} \tau_{\text{max}} + \frac{l^2}{K} \right\} < 0$$

$$\Leftrightarrow \tau_{\text{max}}^2 - \frac{l^2}{K \tau_s} \tau_{\text{max}} + \frac{l^2}{K} > 0$$

$$\Leftrightarrow \tau_{\text{max}}^{(1,2)} = \frac{l^2}{2K\tau_s} \pm \left[ \left( \frac{l^2}{2K\tau_s} \right)^2 - \frac{l^2}{K} \right]^{1/2} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{l^4}{4K^2\tau_s^2} < \frac{l^2}{K}$$

$$\Leftrightarrow l < 2\sqrt{K}\tau_s = \frac{2}{\sqrt{3}} l_{\text{krit}} \approx 1,1547$$

Also gilt:  $V_{\text{eff}}(\tau_{\text{max}}) < V_{\text{eff}}(\infty)$  genau

dann, falls

$$l_{\text{krit}} < l < \frac{2}{\sqrt{3}} l_{\text{krit}} \approx 1,1547 l_{\text{krit}}$$

Freier Fall bis zum Horizont

und darüber hinaus!

A. Radialer freier Fall von  $r=R > r_s$   
bis nach  $R \rightarrow r \gg r_s$

Für den radialen Fall ist  $\lambda = 0$ ; nach (7.16) also

$$V_{eff}(r) = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (7.23)$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 + c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = \frac{\tilde{E}^2}{c^2} \quad (7.24)$$

Mit Anfangsdatum  $\dot{r} = 0$  für  $r = R$  folgt

$$\frac{\tilde{E}^2}{c^2} = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{R}\right) \quad (7.25)$$

$$\text{Also } \dot{r}^2 = c^2 r_s \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = c^2 \frac{r_s}{R} \left(\frac{R}{r} - 1\right);$$

dabei ist hier  $\tau = \frac{d\tau}{dt}$ ,  $\tau = \text{Eigenzeit}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau &= \frac{1}{c} \left(\frac{R}{r_s}\right)^{1/2} \int_r^R \frac{dr'}{\left[\frac{R}{r'} - 1\right]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{c} \left(\frac{R^3}{r_s}\right)^{1/2} \int_{\frac{r}{R}}^1 \frac{dx}{\left[\frac{1}{x} - 1\right]^{1/2}} \quad (7.26) \end{aligned}$$

Man beachte dass  $\frac{1}{c} \left(\frac{R^3}{r_s}\right)^{1/2} = \left(\frac{R^3}{2GM}\right)^{1/2}$

(keine  $c$ -Abhängigkeit). Tatsächlich bekommt man in der Newtonschen Theorie genau denselben Ausdruck für die Fallzeit, nur ist

dort die Newton'sche Absolute Zeit  $t$   
und nicht die Eigenzeit  $\tau$  gemeint

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 - G \frac{M}{r} = E, \quad \dot{r} = 0 \text{ für } r = R$$

$$\rightarrow \dot{r}^2 = 2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int dt = t &= \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int \frac{dr}{\left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)^{1/2}} \\ &= \left( \frac{R^3}{2GM} \right)^{1/2} \int \frac{dx}{\left( \frac{1}{x} - 1 \right)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Daraus sieht man bereits, dass auch der  
freie Fall von  $R$  nach  $r = r_s$  nur eine  
endliche Eigenzeit dauert.

Wir berechnen das Integral

$$\int_{\frac{1}{R}}^1 \frac{dx}{\left( \frac{1}{x} - 1 \right)^{1/2}} = \int_{\frac{1}{R}}^1 \frac{x dx}{(-x^2 + x)^{1/2}}$$

$$\text{Setze } z = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(z+1), \quad x-1 = \frac{1}{2}(z-1)$$

$$\begin{aligned} z &= \int_{\left(2\frac{1}{R}-1\right)}^1 \frac{1}{2} \frac{(1+z) dz}{(1-z^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin^{-1}(z) - (1-z^2)^{-1/2} \right\}_{\left(2\frac{1}{R}-1\right)}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(1-2\frac{1}{R}\right) + \left[1 - \left(2\frac{1}{R}-1\right)^2\right]^{1/2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(1-2\frac{1}{R}\right) + 2\left(\frac{1}{R}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\Rightarrow \tilde{t}(R, r) = \left( \frac{R^3}{c^2 r_s} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( 1 - \frac{2r}{R} \right) + \left( \frac{r}{R} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{1/2} \right\} \quad (7.29)$$

Für  $r = r_s$  bleibt dies endlich und man bekommt

$$\begin{aligned} \tilde{t}(R, r_s) &= \frac{R}{c} \left( \frac{R}{r_s} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( 1 - \frac{r_s}{R} \right) + \left( \frac{r_s}{R} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{r_s}{R} \right)^{1/2} \right\} \\ &= \frac{R}{c} \left( 1 - \frac{r_s}{R} \right)^{1/2} + \frac{R}{c} \left( \frac{R}{r_s} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( 1 - \frac{r_s}{R} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Die Eigenzeit eines bei festem Radius  $r_B$  ruhenden statischen Beobachters ist proportional zu  $(g_{00}(r_B))^{1/2} dt$

Die Koordinatenzeit  $t$  divergiert aber entlang der Weltlinie des fadischen Teilchens falls für  $r \rightarrow r_s$ .

$$\text{Es war ja } d\tilde{t} = \frac{-1}{c} \frac{dr}{\left( \frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{R} \right)^{1/2}}$$

Nach (7.13) ist aber

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{t}} &= \frac{dt}{d\tilde{t}} = \left( \tilde{E}/c^2 \right) / \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{r_s}{R} \right)^{1/2} / \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \end{aligned}$$

Letzteres wegen (7.25):  $\tilde{E}/c^2 = \left( 1 - \frac{r_s}{R} \right)^{1/2}$ .

Also

$$dt = \dot{\tilde{t}} d\tilde{t} = -\frac{1}{c} \left( 1 - \frac{r_s}{R} \right)^{1/2} \left[ \frac{dr}{\left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \left( \frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{R} \right)^{1/2}} \right]$$

$$L(R, \tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau_s}{R}\right)^{1/2}$$

$$\times \int_{\tau}^R \frac{dr'}{\left(1 - \frac{\tau_s}{r'}\right) \left(\frac{\tau_s}{r'} - \frac{\tau_s}{R}\right)^{1/2}}$$

$$\tau_s \int_{\tau/\tau_s}^{R/\tau_s} \frac{dz}{\left(1 - \frac{1}{z}\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{\tau_s}{R}\right)^{1/2}} \quad z = \frac{r'}{\tau_s} \quad (7.31)$$

Für  $r' \in [\tau, R]$  ist  $z \in [\tau/\tau_s, R/\tau_s]$   
 und  $\left(\frac{1}{z} - \frac{\tau_s}{R}\right)^{1/2} \in \left[\left(\frac{\tau_s}{\tau} - \frac{\tau_s}{R}\right)^{1/2}, 0\right]$ ; also

$$\begin{aligned} & \int_{\tau/\tau_s}^{R/\tau_s} \frac{dz}{\left(1 - \frac{1}{z}\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{\tau_s}{R}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(\frac{\tau_s}{\tau} - \frac{\tau_s}{R}\right)^{1/2}} \int_{\tau/\tau_s}^{R/\tau_s} \frac{dz}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)} \\ & = \frac{1}{\left(\frac{\tau_s}{\tau} - \frac{\tau_s}{R}\right)^{1/2}} \left[ (z-1) + \ln|z-1| \right] \Big|_{\tau/\tau_s}^{R/\tau_s} \\ & = \frac{1}{\left(\frac{\tau_s}{\tau} - \frac{\tau_s}{R}\right)^{1/2}} \left[ \frac{R-\tau}{\tau_s} + \ln \left( \frac{\frac{R}{\tau_s} - 1}{\frac{\tau}{\tau_s} - 1} \right) \right] \quad (7.32) \end{aligned}$$

was für  $\tau \rightarrow \tau_s$  logarithmisch divergiert

$$L(R, \tau \rightarrow \tau_s) \rightarrow \infty. \quad (7.33)$$



## B. Beliebige (zeitartige) Bewegung für $r < r_s$

Die Bedeutung der Region  $r < r_s$  der "äußeren Schwarzschild-Lösung" wird später klar werden.

Sei

$$g = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

und  $r < r_s$ . Also ist  $t$  eine Raumartige und  $r$  eine zeitartige Koordinate (d.h.  $\partial/\partial t$  raumartig und  $\partial/\partial r$  zeitartig).

Es gilt  $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2$ , also

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = c^2$$

$$\Leftrightarrow -c^2 \dot{t}^2 \underbrace{\left(\frac{r_s}{r} - 1\right)}_{> 0} + \underbrace{\frac{\dot{r}^2}{\left(\frac{r_s}{r} - 1\right)}}_{> 0} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = c^2 \quad (7.34)$$

$$\leadsto \frac{\dot{r}^2}{\frac{r_s}{r} - 1} = c^2 \dot{t}^2 \left(\frac{r_s}{r} - 1\right) + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + c^2$$

$$> c^2$$

$$\Rightarrow -\dot{r} > c \left(\frac{r_s}{r} - 1\right)^{1/2} \quad (7.35)$$

falls  $\dot{r} < 0$ . Beachte: da  $\dot{r} \neq 0$  ist  $\dot{r}$  stets  $< 0$ , falls anfänglich  $\dot{r} < 0$ .



Die Eigenzeit einer beliebigem zeitartigen Bewegung für  $\tau = \tau_s$  nach  $\tau = 0$  kann mit (7.35) einfach abgeschätzt werden

$$(7.35) \Leftrightarrow d\tilde{t} < -\frac{1}{c} \frac{d\tau}{\left(\frac{\tau_s}{\tau} - 1\right)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \tilde{t}_* := \int_{\tau=\tau_s}^{\tau=0} d\tilde{t} < \frac{1}{c} \int_0^{\tau_s} \frac{d\tau}{\left(\frac{\tau_s}{\tau} - 1\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{c} \int_0^{\tau_s} \frac{\tau d\tau}{\left[-\left(\tau - \frac{\tau_s}{2}\right)^2 + \frac{\tau_s^2}{4}\right]^{1/2}} \quad y = \frac{2\tau}{\tau_s}$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\tau_s}{2} \int_0^2 \frac{y dy}{\left[1 - (y-1)^2\right]^{1/2}} \quad z = y-1$$

$$= \frac{\tau_s}{2c} \int_{-1}^1 \frac{(z+1) dz}{\left[1 - z^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{\tau_s}{2c} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\left[1 - z^2\right]^{1/2}} \quad (\text{da } \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \text{ ungerade)}$$

$$= \frac{\tau_s}{2c} \sin^{-1}(z) \Big|_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_s}{c}$$

$$\Rightarrow \tilde{t}_* < \frac{\pi}{2} \frac{\tau_s}{c} = \pi \frac{GM}{c^3} \quad (7.36)$$

Diese obere Schranke gilt für jede zeitartige Bewegung, unabhängig von der Beschleunigung. Da zeitartige Geodäsiken die Bogenlänge maximieren, wird die Eigenzeit von  $\tau = \tau_s$  nach  $\tau = 0$  durch Beschleunigungen nur verkürzt. Das Zünden von Bremsraketen verkürzt somit die verbleibende Lebensspanne nur.

Es ist

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{G \cdot 10^6 M_{\odot}}{c^3} = \frac{1}{\pi} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{36}}{27 \cdot 10^{24}} \text{ s}$$

$$= (2\pi \cdot 6,67 / 27) \cdot 10 \text{ s} = 15 \text{ sec}$$

$$\Rightarrow \tau \text{ [sec]} = 15 \times M [10^6 M_{\odot}] \quad (\text{A.37})$$

Beispiel: Nach dem Fall durch den Horizont eines galaktischen Schwarzen Lochs von  $4 \cdot 10^6 M_{\odot}$  verbleibt keine Minute an Eigenzeit bis zur Singularität  $\tau = 0$ .

- c. Drucker- und Zugkräfte beim freien Fall durch den Horizont  $r = r_s$ .

Die Komponenten des Krümmungstensors für die äußere Schwarzschild Metrik ergeben sich aus (5A.10) für  $\dot{R} = \dot{b} = 0$ ,  $R' = 1$  und

$$e^a = e^{-b} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2}$$

$$a = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$$

$$a' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{r_s}{r^2}$$

$$= \frac{r_s}{2} (r^2 - r r_s)^{-1}$$

$$a'' = -\frac{r_s}{2} (r^2 - r r_s)^{-2} (2r - r_s)$$

$$\Rightarrow a'' + 2a'^2 = (r^2 - r r_s)^{-2} \left(-r r_s + \frac{r_s^2}{2} + \frac{r_s^2}{2}\right)$$

$$= r^{-4} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} (-r r_s) \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$$

$$= -\frac{r_s}{r^3} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}$$

$R_{\theta\theta}$

$$R_{\theta\theta} = -e^{-2b} (a'' + a'(a-b')) = -e^{-2b} (a'' + 2a'^2)$$

$$= \frac{r_s}{r^3}$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} e^{-2b} a' = -\frac{1}{2} \frac{r_s}{r^3}$$

$$\begin{aligned} R_{\tau\theta r\theta} &= R_{\tau\varphi r\varphi} = -\frac{1}{r} e^{-2b} b' \\ &= -R_{\theta\theta\theta\theta} = +\frac{1}{2} \frac{\tau_s}{\tau^3} \end{aligned}$$

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = -\frac{1}{r^2} [1 - e^{-2b}] = -\frac{\tau_s}{\tau^3}$$

Also sind die nicht verschwindenden Komponenten

$$\begin{aligned} \frac{\tau_s}{\tau^3} &= R_{\theta r \theta r} \\ &= -R_{\theta\varphi\theta\varphi} \\ &= 2R_{\tau\theta r\theta} = 2R_{\tau\varphi r\varphi} \\ &= -2R_{\theta\theta\theta\theta} = -2R_{\theta\varphi\theta\varphi} \end{aligned} \quad (7.38)$$

wobei wir daran erinnern, dass die Komponenten auf dem orthonormierten Ko-Vierbein  $\theta^0 = e^a c dt$ ,  $\theta^1 = e^b dr$ ,  $\theta^2 = r d\theta$  und  $\theta^3 = r \sin\theta d\varphi$  bezogen sind.

1. Beobachtung: Die Krümmungskomponenten sind regulär bei  $r = \tau_s$  und divergieren bei  $r \rightarrow 0$ .  
 $\Rightarrow$  die Krümmung ist regulär bei  $r = \tau_s$  und divergent bei  $r \rightarrow 0$ .

2. Beobachtung: Der Krümmungstensor ist invariant unter radialen Lorentz-Transformationen

$$\Lambda: \begin{aligned} \theta^0 &\rightarrow \hat{\theta}^0 := \cosh \alpha \theta^0 + \sinh \alpha \theta^r \\ \theta^r &\rightarrow \hat{\theta}^r := \sinh \alpha \theta^0 + \cosh \alpha \theta^r \\ \theta^a &\rightarrow \hat{\theta}^a := \theta^a \\ \theta^s &\rightarrow \hat{\theta}^s := \theta^s \end{aligned}$$

$$\theta^M \rightarrow \hat{\theta}^M := \Lambda^M{}_\nu \theta^\nu \quad (7.39a)$$

$$\Lambda^M{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.39b)$$

$$\begin{aligned} R &= R_{\mu\nu\lambda\sigma} \theta^\mu \otimes \theta^\nu \otimes \theta^\lambda \otimes \theta^\sigma \quad \rightarrow \\ \hat{R} &=: \hat{R}_{\mu\nu\lambda\sigma} \hat{\theta}^\mu \otimes \hat{\theta}^\nu \otimes \hat{\theta}^\lambda \otimes \hat{\theta}^\sigma \\ &= \underbrace{R_{\mu\nu\lambda\sigma} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\lambda{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta}_{=: \hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}} \theta^\alpha \otimes \theta^\beta \otimes \theta^\gamma \otimes \theta^\delta \end{aligned}$$

Die Behauptung ist:  $R = \hat{R}$ , d.h.

$$\hat{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (7.40)$$

Beweis der Behauptung (Nachrechnen)

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_{\sigma\sigma\sigma\sigma} &= R_{\mu\nu\lambda\sigma} \Lambda_0^\mu \Lambda_r^\nu \Lambda_0^\lambda \Lambda_r^\sigma \\
 &= (R_{\sigma\sigma\lambda\sigma} \underbrace{\Lambda_0^\lambda \Lambda_r^\lambda}_{\cosh^2(\lambda)} + R_{\sigma\sigma\lambda\sigma} \underbrace{\Lambda_0^\lambda \Lambda_r^\lambda}_{\sinh^2(\lambda)}) \Lambda_0^\lambda \Lambda_r^\lambda \\
 &= R_{\sigma\sigma\lambda\sigma} \Lambda_0^\lambda \Lambda_r^\lambda \\
 &= R_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \Lambda_0^\lambda \Lambda_r^\lambda + R_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \Lambda_0^\lambda \Lambda_r^\lambda \\
 &= R_{\sigma\sigma\sigma\sigma} (\cosh^2(\lambda) - \sinh^2(\lambda)) \\
 &= R_{\sigma\sigma\sigma\sigma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_{\sigma\sigma\sigma\sigma} &= R_{\mu\nu\lambda\sigma} \underbrace{\Lambda_0^\mu}_{\delta_0^\mu} \underbrace{\Lambda_r^\nu}_{\delta_r^\nu} \Lambda_0^\lambda \Lambda_r^\sigma \\
 &= R_{\sigma\sigma\sigma\sigma}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_{\sigma\sigma\sigma\sigma} &= R_{\mu\nu\lambda\sigma} \Lambda_r^\mu \Lambda_0^\nu \Lambda_r^\lambda \Lambda_0^\sigma \\
 &= R_{\mu\sigma\lambda\sigma} \Lambda_r^\mu \Lambda_r^\lambda \\
 &= R_{\sigma\sigma\sigma\sigma} (\Lambda_r^\lambda)^2 + R_{\sigma\sigma\sigma\sigma} (\Lambda_0^\lambda)^2 \\
 &\quad + 2 R_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \Lambda_0^\lambda \Lambda_r^\lambda \\
 &= R_{\sigma\sigma\sigma\sigma} (\cosh^2(\lambda) - \sinh^2(\lambda)) \quad \left( \begin{array}{l} \text{da } R_{\sigma\sigma\sigma\sigma} = \\ -R_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \end{array} \right) \\
 &= R_{\sigma\sigma\sigma\sigma}
 \end{aligned}$$

$$\overset{\rightarrow}{R}_{\tau\varphi\tau\varphi} = R_{\tau\varphi\tau\varphi} \quad (\text{gleiches})$$

$$\begin{aligned} \overset{\rightarrow}{R}_{0000} &= R_{\mu\nu\lambda\sigma} \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu \Lambda_0^\lambda \Lambda_0^\sigma \\ &= R_{\mu 0 \lambda 0} \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\lambda \\ &= R_{0000} (\Lambda_0^0)^2 + R_{r0r0} (\Lambda_0^r)^2 \\ &\quad + 2 R_{00r0} \Lambda_0^0 \Lambda_0^r \\ &= R_{0000} (\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha)) \\ &\quad (\text{da } R_{r0r0} = -R_{0000}) \\ &= R_{0000} \end{aligned}$$

$$\overset{\rightarrow}{R}_{0r0r} = R_{0r0r} \quad (\text{gleiches}).$$

Auch treten keine neuen Komponenten auf:

$$\begin{aligned} \overset{\rightarrow}{R}_{00r0} &= R_{\mu\nu\lambda\sigma} \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu \Lambda_r^\lambda \Lambda_0^\sigma \\ &= R_{\mu 0 \lambda r} \Lambda_0^\mu \Lambda_r^\lambda \\ &= R_{0000} \Lambda_0^0 \Lambda_r^0 + R_{r0r0} \Lambda_0^r \Lambda_r^r \\ &\quad + 2 R_{00r0} \Lambda_0^0 \Lambda_r^r \\ &= R_{0000} (\Lambda_0^0 \Lambda_r^0 - \Lambda_0^r \Lambda_r^r) \\ &\quad (\text{da } R_{r0r0} = -R_{0000}) \\ &= R_{0000} (\cosh(\alpha) \sinh(\alpha) - \cosh(\alpha) \sinh(\alpha)) = 0. \end{aligned}$$



⇒ Die Komponenten des Krümmungstensors bezüglich einer radial geboasteten Basis sind gleich den oben in (7.38) angegebenen.

Bemerkung: Das ist kein Zufall, sondern trifft für alle Krümmungstensenoren vom Petrov-Typ D ((2,2)) zu

Als nächstes erinnern wir an die Jacobi-Gleichung für eine Schar von Geodäsiken

$$\gamma: \mathbb{R} \times U \rightarrow M, \quad U \subset \mathbb{R}^3$$

$\uparrow$                      $\uparrow$   
 Figurezeit            Scharparameter

$$\mathbb{R} \times U \ni (s, \vec{p}) \mapsto \gamma(s, \vec{p})$$

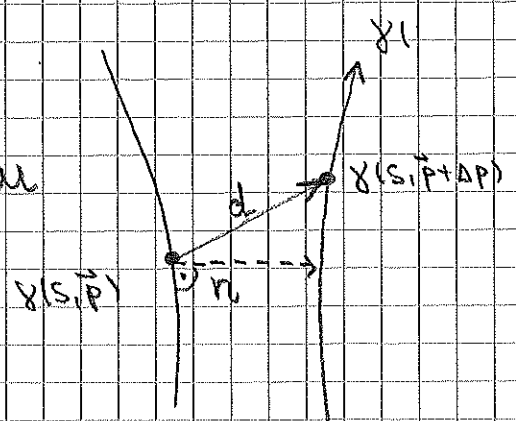
Betrachte benachbarte Geodäsiken  $\gamma(\cdot, \vec{p})$  und  $\gamma(\cdot, \vec{p} + \Delta\vec{p})$ . Der Differenzvektor  $d(\vec{p})$  von  $\gamma(\vec{p}, \vec{p})$  nach  $\gamma(\vec{p}, \vec{p} + \Delta\vec{p})$  ist gleich

$$d = \Delta\vec{p} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \vec{p}}$$

Seine Projektion  $\perp \dot{\gamma}(\cdot, \vec{p}) = \mathcal{M}$

$$n = d - \frac{1}{c^2} \mathcal{M} g(\mathcal{M}, d)$$

$$\text{da } g(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = c^2.$$





Sowohl

$$\mu = \dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \gamma_* \frac{\partial}{\partial t}$$

als auch

$$d = \gamma' = \Delta \vec{p} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \vec{p}} = \Delta \vec{p} \gamma_* \frac{\partial}{\partial \vec{p}}$$

sind Vektorfelder auf  $\gamma(\mathbb{R} \times U) \subset M$   
und es gilt

$$[\mu, d] = \gamma_* \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \Delta \vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] = 0$$

Es gilt aber auch

$$[\mu, h] = 0, \quad h := d - \dot{c}^2 \mu g(\mu, d)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} [\mu, h] &= -\dot{c}^2 \mu \nabla_{\mu} (g(\mu, d)) \\ &= -\dot{c}^2 g(\mu, \nabla_{\mu} d) \quad (\text{da } \nabla g = 0, \nabla_{\mu} \mu = 0) \\ &= -\dot{c}^2 g(\mu, \nabla d \mu) \quad (\text{da } [\mu, d] = 0 \text{ und } \nabla \text{ Torsionsfrei}) \\ &= -\frac{\dot{c}^2}{2} \nabla_d g(\mu, \mu) = 0 \quad (\text{da } g(\mu, \mu) = \dot{c}^2). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für die 2-fache kov.  
Ableitung von  $h$  nach  $\mu$ .

$$\begin{aligned}
 \nabla_M \nabla_M n &= \nabla_M \nabla_n M && \text{(wegen } [n, M] = 0 \\
 &= [\nabla_M, \nabla_n] M && \text{und Torsionsfreiheit)} \\
 &= R(M, n) M && \text{(wegen } \nabla_n M = 0 \\
 & && \text{(wegen } [M, n] = 0))
 \end{aligned}$$

Jacobi Gleichung

$$\nabla_M \nabla_M n = R(M, n) M$$

Sei  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  eine entlang von  $\gamma(\cdot, \vec{p})$  mitgeführte orthonormierte Basis, so dass

$$1) \quad e_0 = \frac{1}{c} \dot{\gamma} = \frac{1}{c} \dot{M}$$

$$2) \quad \nabla_M e_a = 0$$

Wegen  $g(n, M) = 0$  ist  $g(e_0, n) = 0 \Rightarrow$

$$n = n^a e_a$$

$$\Rightarrow \nabla_M \nabla_M n = (\nabla_M \nabla_M n^a) e_a = \frac{d^2 n^a}{dt^2} e_a$$

Auf der anderen Seite

$$\begin{aligned}
 R(M, n) M &= c^2 R^a{}_{00b} n^b e_a \\
 &= -c^2 R^a{}_{0b0} n^b e_a
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 n^a}{dt^2} = -c^2 R^a{}_{0b0} n^b$$

Dies wenden wir nun auf zwei benachbarte radiale Geodetische an:

$$\begin{aligned}\ddot{h}^r &= -c^2 \overset{\wedge}{R}{}^r{}_{0r0} h^r \\ &= c^2 R_{r0r0} h^r \\ &= c^2 \frac{\tau_s}{r^3} h^r = 2GM r^{-3} h^r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{h}^\theta &= -c^2 \overset{\wedge}{R}{}^\theta{}_{\theta\theta\theta} h^\theta \\ &= c^2 R_{\theta\theta\theta\theta} h^\theta \\ &= -\frac{c^2}{2} \frac{\tau_s}{r^3} h^\theta = -GM r^{-3} h^\theta\end{aligned}$$

$$\ddot{h}^\varphi = -GM r^{-3} h^\varphi \quad (\text{genaus})$$

Ein Massenelement  $d\mu$  eines ausgedehnten Körpers das radial in einer Höhe  $h$  über dem Schwerpunkt  $S$  liegt, erfährt eine von  $S$  radial weggerichtete Kraft

$$dF_{||} = \left( c^2 \tau_s \frac{h}{r^3} \right) d\mu$$

entgegen den inneren Spannungen, wenn letztere den Körper an einer Längsdeformation hindern.

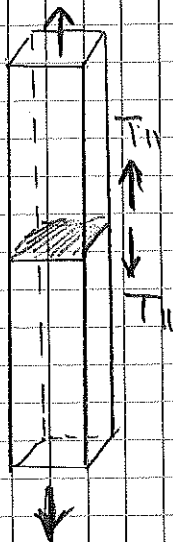
Hat der Körper die Geometrie einer Säule der Länge  $l$  mit konstantem quadratischem Querschnitt  $q$  und Breite  $b$ ,  $q = b^2$ , und  $\rho_s$  die Massendichte in der Säule konstant  $\rho$ , so ist die gesamte auf die mittlere Querschnittsfläche ausgeübte Kraft

$$F_{||} = c^2 \frac{\rho_s}{\tau^3} \int_0^{l/2} q \rho h \, dh$$

$$= c^2 \frac{\rho_s}{\tau^3} q \rho \frac{1}{8} l^2$$

Dabei haben wir angenommen, dass  $l \ll \tau$  so daß wir  $\tau$  als konstant entlang der Säule ansehen. Die Querschnittsspannung (Kraft pro Fläche) ist

$$T_{||} = \frac{F_{||}}{q} = \frac{1}{8} \cdot \rho c^2 \cdot \left(\frac{l}{\tau_s}\right)^2 \cdot \left(\frac{\tau_s}{\tau}\right)^3$$



Es handelt sich hier um eine Zugspannung, da beide Hälften der Säule auseinandergezogen werden. Diese verstehen wir mit einem positiven Vorzeichen

Grauz analog ergibt sich senkrecht zur Seilenebene eine Druckspannung von der Hälfte des Betrages

$$T_{\perp} = -\frac{1}{16} \cdot \rho c^2 \cdot \left(\frac{b}{r_s}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_s}{r}\right)^3$$

Wir schreiben  $r_s = 2GM/c^2$  in  $T_{\parallel}$ :

$$T_{\parallel} = \rho \cdot l^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{32} \cdot \frac{c^6}{G^2 (10^4 M_{\odot})^2}}_{12,5 \cdot s^{-2}} \cdot \left(\frac{10^4 M_{\odot}}{M}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_s}{r}\right)^3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_{\parallel} [N \cdot m^2] &= 12,5 \times \rho [kg \cdot m^{-3}] \times l^2 [m] \\ &\quad \times \left(10^4 M_{\odot} / M\right)^2 \times \left(r_s / r\right)^3 \\ &= 1,25 \cdot 10^4 \cdot \rho [g \cdot cm^{-3}] \times l^2 [m] \\ &\quad \times \left(10^4 M_{\odot} / M\right)^2 \times \left(r_s / r\right)^3 \end{aligned}$$

Die Querschnittsfläche des menschlichen Körpers (Bauchbereich) ist etwa  $30 \times 40 \text{ cm}^2 = 0,12 \text{ m}^2$ . Hängt man an die Füße eine Masse von 100 kg und hält sich mit den Händen an einem Rack fest, so wirkt auf den Querschnitt die Zugspannung  $100 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} / 0,12 \text{ m}^2 = 8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = T_{\parallel}$  (aushaltbar)

Mit  $\lambda = 1,8 \text{ m}$ ,  $\rho \cong 1 \text{ g cm}^{-3}$  (Wasser)

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\parallel \text{ aushaltb.}}} = 5 \times \left( \frac{M}{10^4 M_{\odot}} \right)^2 \times \left( \frac{r_s}{r} \right)^3$$

- Der freie Fall durch den Horizont ( $r=r_s$ ) eines Schwarzen Lochs wird recht unangenehm, wenn dessen Masse kleiner als 10.000 Sonnenmassen ist.

Beim Galaktischen Schwarzen Loch ist

$$M = 4 \cdot 10^6 M_{\odot}$$

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\parallel \text{ aush.}}} \cong 3 \cdot 10^{-5}$$

- Beim freien Fall auf einen Neutronenstern von  $M = 1,5 M_{\odot}$  ist

$$\frac{T_{\parallel}}{T_{\parallel \text{ aushaltb.}}} \cong 2 \times 10^8 \left( \frac{r_s}{r} \right)^3$$

Da der Radius eines Neutronensterns etwa  $(r_s/R) \approx 0,3$  entspricht wird

$T_{\parallel}$  größer als  $10^6 \times T_{\parallel \text{ aushaltbar}}$ ,

bevor man dessen Oberfläche erreicht.

$T_{\parallel}$  wird gleich  $10 \times T_{\parallel \text{ aushaltbar}}$  bei

$$r \cong 271 r_s.$$