8. Vorlesung

Allgemeine Aussagen über Lösungen der TOV-Gleichungen

Bisher nur explizite Lösung für $\varrho = \text{konst}$ diskutiert. Gibt es bei nicht konstanter Energiedichte ϱc^2 Sterne mit $R < (9/8) r_s$?

Die Grundgleichungen waren

$$g = e^{2a(r)} c^2 dt^2 - e^{2b(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \qquad (8.1)$$

(6.26) $$e^{2b(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \qquad (8.2)$$

Wir nehmen an, dass $\varrho(r)$ bestimmt ist durch $\varrho(p(r))$, also ϱ als Funktion von p gegeben ist (feste Zustandsgleichung). Dann verbleiben 3 Differentialgleichungen für die drei Funktionen $p(r)$, $M(r)$ und $a(r)$

entkoppelndes Untersystem für $p(r), M(r)$.

$$-p' = G \frac{M(r) + 4\pi r^3 p(r)/c^2}{r^2 \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)} \left(\varrho(r) + p(r)/c^2\right) \qquad (8.3)$$

$$M'(r) = 4\pi r^2 \varrho(r) \qquad (8.4)$$

Löse durch Integration bei bekannten p, M.

$$a'(r) = \frac{G}{c^2} \frac{M(r) + 4\pi r^3 p(r)/c^2}{\left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right) r^2} \qquad (8.5)$$

Annahmen:

A1: $T^{\mu\nu} = (\varrho + p/c^2)\, u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p$

$\varrho = \varrho(r)$, $p = p(r)$

A2: $\exists$ Zustandsgl. $p = p(\varrho)$

[A2: $\varrho \geq 0$ Schwache Energiebed.]

A3: $|p| < \varrho c^2$ Energiedominanz

A4: $dp/d\varrho \geq 0$

$\Rightarrow$ ist $p \geq 0$ für kleine ϱ $\Rightarrow$ $p \geq 0$ immer.

A5: Die Zustandsgleichung ist für $\varrho < \varrho_0$ bekannt, wobei ϱ_0 ein Wert nicht weit unterhalb nuklearer Dichten ist; z. B.

$$\varrho_0 \cong 5 \times 10^{17}\ \mathrm{Kg \cdot m^{-3}}$$

A6: Manchmal wird auch

$$\frac{dp}{d\varrho} \leq c^2$$

angenommen, mit der Begründung, dass $(dp/d\varrho)^{1/2}$ die Schallgeschwindigkeit im Material sei. Das ist jedoch nur richtig, falls die Schallwellen nicht allzu großer Dispersion und Absorption unterliegen.

Lemma 1:

$$\frac{2GM(r)}{c^2 r} < 1 \qquad \forall r \leq R \qquad (8.6)$$

(damit $\forall r$)

Argument: Wir betrachten die TOV-Gleichung (8.3). Wir nehmen an, es gäbe ein $r_* < R$ mit

$$\frac{2GM(r_*)}{c^2 r_*} = 1 \qquad (8.7)$$

Für $r - r_* = \varepsilon$ gilt mit

$$M(r) = M(r_*) + \varepsilon M'(r_*)$$

$$= M(r_*) + \varepsilon\, 4\pi r_*^2 \rho(r_*)$$

$$\frac{2GM(r)}{c^2 r} = \frac{2G}{c^2}\left[\frac{M(r_*)}{r_*} + \left(\frac{M(r)}{r}\right)'_{r=r_*}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right]$$

$$= 1 + \frac{2G}{c^2}\left[\frac{M'(r_*)}{r_*} - \frac{M(r_*)}{r_*^2}\right]\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$= 1 + \frac{2G}{c^2}\left[4\pi\rho(r_*)r_* - \frac{c^2}{2Gr_*}\right]\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$= 1 + \left[\frac{8\pi G}{c^2}\rho(r_*)r_* - \frac{1}{r_*}\right]\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} = \frac{1}{r_*}\left[1 - \frac{8\pi G}{c^2}r_*^2\rho(r_*)\right]\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Da $1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} = 1$ für $r = 0$ und

$r = r_*$ erste Nullstelle, ist

$$\frac{1}{r_*}\left(1 - \frac{8\pi G}{c^2} r_*^2 \rho(r_*)\right)$$

$$= \frac{d}{dr}\Big|_{r=r_*}\left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right) < 0$$

also

$$1 - \frac{8\pi G}{c^2} r_*^2 \rho(r_*) < 0 \qquad (8.8)$$

Also

$$-p'(r) = G \frac{M(r_*) + 4\pi r_*^3 p(r_*)/c^2}{r_*\left[1 - \frac{8\pi G}{c^2} r_* \rho(r_*)\right]} \frac{1}{\varepsilon}\left(\rho(r_*) + p(r_*)/c^2\right)$$

$$+ O(1)$$

$$= G \frac{c^2 r_*/2G + 4\pi r_*^3 p(r_*)/c^2}{r_*\left[1 - \frac{8\pi G}{c^2} r_*^2 \rho(r_*)\right]} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\rho(r) + p(r)/c^2\right)$$

$$+ O(1)$$

$$\Rightarrow \frac{p'(r)}{p(r) + \rho(r)c^2} = -\frac{1}{r - r_*} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{8\pi G}{c^2} r_*^2 p(r_*)/c^2}{1 - \frac{8\pi G}{c^2} r_*^2 \rho(r_*)}$$

$$+ O(|r - r_*|^0) \qquad (8.9)$$

Definiert man

$$\eta := \frac{\rho c^2 + p}{n} = \text{Enthalpie / Teilchen} \qquad (8.10)$$

n = Teilchendichte

so ist

$$d \ln \eta = \frac{n}{\rho c^2 + p} \; d\left(\frac{\rho c^2 + p}{n}\right)$$

$$= \frac{n}{\rho c^2 + p}\left(\frac{c^2 d\rho + dp}{n} - \frac{\rho c^2 + p}{n^2}\, dn\right)$$

$$= \frac{dp}{\rho c^2 + p} + \frac{1}{\rho + p/c^2}\left(d\rho - (\rho + p/c^2)\frac{dn}{n}\right) \qquad (8.11)$$

Nach dem 1. Hauptsatz ist aber
(s = Entropie pro Teilchen)

$$T\, ds = d\left(\frac{\rho c^2}{n}\right) + p\, d\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{c^2}{n}\, d\rho - \frac{\rho c^2}{n^2}\, dn - p\frac{1}{n^2}\, dn$$

$$= \frac{c^2}{n}\left(d\rho - (\rho + p/c^2)\frac{dn}{n}\right) \qquad (8.12)$$

Also

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{dp}{\rho c^2 + p} + \frac{n}{\rho c^2 + p}\, T\, ds \qquad (8.13)$$

Insbesondere

$$\frac{p'}{p+c^2\varrho} = \frac{\eta'}{\eta} - \frac{n}{\varrho c^2+p} T s' \qquad (8.14)$$

Mit der Annahme eines Energie-Impulstensors für eine <u>ideale</u> Flüssigkeit haben wir die Existenz radialer Wärmeströme bereits ausgeschlossen, so dass in (8.14) konsequenterweise $s'=0$ zu setzen ist.

Somit folgt aus (8.7)

$$(\ln\eta)' = \frac{-1}{r-r_*} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\frac{8\pi G}{c^2} r_*^2 \, p(r_*)/c^2}{1-\frac{8\pi G}{c^2} r_*^2 \, \varrho(r_*)} \qquad (8.15)$$

Wegen (8.8) ist der Nenner der rechten Seite negativ, der Zähler hingegen positiv (da $p>0$, was aus A4 folgt), die rechte Seite von (8.15) also insgesamt negativ für $r<r_*$

Integrieren wir (8.15) über das Intervall $[r, \hat{r}_*]$, mit $r<\hat{r}_*<r_*$, so folgt

$$\ln\eta(\hat{r}_*) - \ln\eta(r) = k \int_r^{\hat{r}_*} \frac{dr'}{r'-r_*}$$

$$\text{mit } k = -\frac{1}{2} \frac{1+\frac{8\pi G}{c^2} r_*^2 \, p(r_*)/c^2}{1-\frac{8\pi G}{c^2} r_*^2 \, \varrho(r_*)} > 0 \qquad (8.16)$$

Es ist

$$\int_r^{\hat{r}_*} \frac{dr'}{r'-r_*} \qquad r_* - r' = y' \geq 0$$

$$= + \int_y^{\hat{y}} \frac{dy'}{y'} = \ln \hat{y} - \ln y$$

$$= \ln \left[\frac{r_* - \hat{r}_*}{r_* - r} \right]$$

Insgesamt also

$$\ln \left[\frac{\eta(\hat{r}_*)}{\eta(r)} \right] = k \ln \left[\frac{r_* - \hat{r}_*}{r_* - r} \right]$$

$$\text{bzw} \quad \eta(\hat{r}_*) = \eta(r) \left[\frac{r_* - \hat{r}_*}{r_* - r} \right]^k \qquad (8.17)$$

$$\Rightarrow \quad \eta(\hat{r}_* \to r_*) = 0$$

$$\Rightarrow \quad p(\hat{r}_* \to r_*) = -c^2 \varrho(r_*) \quad < 0$$

$\lightning$ zur Annahme

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} > 0 \quad \forall r \in [0, R] \qquad (8.18)$$

$\blacksquare$

Korollar:

$$\frac{d\varrho}{dr} \equiv \varrho' \leq 0 \quad \forall r \in [0, R] \tag{8.19}$$

Beweis

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{dp}\, p' \quad \left(\begin{array}{c}\text{Annahme einer} \\ \text{Zustandsgl. A1}\end{array}\right)$$

$$= -\left[\frac{dp}{d\varrho}\right]^{-1} \cdot G \cdot (\varrho + p/c^2)\, \frac{M + 4\pi r^3 p/c^2}{r^2\left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right]} \quad \text{(TOV)} \tag{8.20}$$

≤ 0

wegen $\frac{dp}{d\varrho} \geq 0$ (A4),

$M + 4\pi r^3 p/c^2 \geq 0$ (A2, A4)

und $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) > 0$ (Lemma 1).

Das Gleichheitszeichen in (8.18) gilt gemäß (8.20) genau dann, wenn $d\varrho / dp = 0$, also im inkompressiblen Fall. Fur kompressible Materie ist ϱ eine streng monoton fallende Funktion innerhalb des Sterns.

Ist ϱ_0 die Grenzdichte, unterhalb deren man die Zustandsgleichung kennt, so kann man den Stern in die Region $r < r_0$ (genannt „Kern“) und $r > r_0$ („Hülle“)

einteilen, so dass

$$\left.\begin{array}{l} \rho > \rho_0 \text{ für } r < r_0 \\ \rho < \rho_0 \text{ für } r > r_0 \end{array}\right\} \quad (8.21)$$

wobei $\rho(r_0) = \rho_0$. (8.22)

Es ist dann

$$M_0 := \int_0^{r_0} 4\pi dr\, r^2 \rho(r) \quad (8.23)$$

$$= \text{Grav.-Masse des Kerns}$$

und

$$p_0 := P(\rho_0) = p(r_0). \quad (8.24)$$

Mit den Randbedingungen $M_0 = M(r_0)$ und $p_0 = p(r_0)$ löst man dann das autonome Untersystem (8.3-4) für $M(r)$, $p(r)$ wobei der Rand des Sterns durch die erste Nullstelle $p(R) = 0$ $R > r_0$ gegeben ist. Dann ist die Gesamtmasse des Sterns gegeben durch

$$\left.\begin{array}{l} M := M_0 + \int_{r_0}^{R} 4\pi r^2 \rho(r)\, dr \\ \quad = \underbrace{M_0}_{\text{Kernmasse}} + \underbrace{M_H(r_0, R)}_{\text{Hüllenmasse}} \end{array}\right\} \quad (8.25)$$

Es gilt wegen $1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} > 0$

für $r = r_0$

$$M_0 < \frac{c^2}{2G} r_0 \qquad (8.26)$$

und da

$$M_0 = \int_0^{r_0} 4\pi r^2 \rho(r)\, dr \geq \rho_0 \int_0^{r_0} 4\pi r^2\, dr$$

$$\Rightarrow \quad M_0 \geq \rho_0 \frac{4\pi}{3} r_0^3 \qquad (8.27)$$

Beide Ungleichungen implizieren durch Elimination von r_0 bzw. M_0:

$$M_0^3 \left(\frac{2G}{c^2}\right)^3 < r_0^3 \leq \frac{3M_0}{4\pi\rho_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad M_0 < \frac{c^3}{G^{3/2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2\pi\rho_0}\right)^{1/2} \qquad (8.28)$$

und

$$\rho_0 \frac{4\pi}{3} r_0^3 \leq M_0 < \frac{c^2}{2G} r_0$$

$$\Leftrightarrow \quad r_0 < \frac{c}{G^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2\pi\rho_0}\right)^{1/2} \qquad (8.29)$$

Für $\rho_0 = 5 \times 10^{17}$ Kg $\cdot$ m^{-3} erhält man z.B

$$M_0 < 6.05\, M_\odot \qquad (8.30a)$$

$$r_0 < 17.9 \text{ Km} \qquad (8.30b)$$

Mehr Informationen und präzisere Abschätzungen erhält man aus

Lemma 2: Es gilt

$$\left(e^{-b} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(e^{-b} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) e^{a}$$

$$= e^{a} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{GM}{c^2 r^3}\right) \qquad (8.31)$$

Beweis: Wir gehen von den Gleichungen (6.23), (6.26) und (6.32):

$$p' = -a' (\rho c^2 + p) \qquad (6.23)$$

$$e^{-2b} = 1 - 2GM/c^2 r \qquad (6.26)$$

$$a' = e^{2b} \frac{G}{c^2} [4\pi r\, p/c^2 + M/r^2] \qquad (6.32)$$

Für den Beweis setzen wir $G = c = 1$.
Die nötigen Faktoren können am Schluss leicht rekonstruiert werden.

Zunächst lösen wir (6.32) nach p auf

$$p = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r}e^{-2b}a' - \frac{M}{r^3}\right] \qquad (8.32)$$

Differentiation nach r liefert

$$p' = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{r}e^{-2b}a'\right)' - \left(\frac{M}{r^3}\right)'\right] \qquad (8.33)$$

Ersetzen von p' auf der linken Seite durch die rechte Seite von (6.23)

$$\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{r}e^{-2b}a'\right)' - \left(\frac{M}{r^3}\right)'\right] = -a'\rho - a'p \qquad (8.34)$$

Ersetzen durch p ganz rechts durch (8.32) und das ρ der rechten Seite durch $\frac{1}{4\pi r^2}M'$ liefert

$$\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{r}e^{-2b}a'\right)' - \left(\frac{M}{r^3}\right)'\right] = -\frac{a'M'}{4\pi r^2}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r}e^{-2b}a'^2 - a'\frac{M}{r^3}\right] \qquad (8.35)$$

Der erste und letzte Term der rechten Seite können zusammengefasst werden zu

$$\frac{a'}{4\pi r}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)' = \frac{1}{2}\frac{a'}{4\pi r}\left(e^{-2b}\right)' \qquad (8.36)$$

Setzt man sowohl auf der linken wie auf der rechten Seite $e^{-2b} = (e^{-b})^2$ und $(e^{-2b})' = 2\, e^{-b}\, (e^{-b})'$, so hat man

$$\frac{1}{4\pi}\left[e^{-b}\left(\frac{1}{r} e^{-b} a'\right)' + \cancel{\frac{1}{r} e^{-b} a' (e^{-b})'} - \left(\frac{M}{r^3}\right)'\right]$$

$$= \frac{a'}{4\pi r} \cancel{e^{-b} (e^{-b})'} - \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{r}\, e^{-b}\, e^{-b}\, a'^2$$

Die durchgestrichenen Terme heben sich weg. Bringt man den verbleibenden Term der rechten Seite auf die linke, so hat man mit

$$\left(\frac{1}{r} e^{-b} a'\right)' + \frac{1}{r} e^{-b} a'^2$$

$$= e^{-a}\left(\frac{1}{r} e^{-b} (e^{a})'\right)'$$

Schließlich die Gleichung

$$\frac{1}{4\pi}\left[e^{-a-b}\left(\frac{1}{r} e^{-b} (e^{a})'\right)' - \left(\frac{M}{r^3}\right)'\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{r} e^{-b} \frac{d}{dr}\right)\left(\frac{1}{r} e^{-b} \frac{d}{dr}\right) e^{a} = \frac{1}{r} e^{a} \frac{d}{dr}\left(\frac{M}{r^3}\right)$$

Das ist gerade die zu beweisende Gleichung (8.31) wenn man hier $M \to GM/c^2$ ersetzt, so dass beide Seiten die Dimension $(\text{Länge})^{-4}$ bekommt. ▨

Wir verwenden nun (8.31) für weitere Abschätzungen.

Zunächst ist mit

$$\xi := \int_0^r dr'\, r'\, e^{b(r')}$$

$$= \int_0^r dr'\, r' \left(1 - \frac{2GM(r')}{c^2 r'}\right)^{-1/2} \qquad (8.37)$$

$$d\xi = dr\; r\, e^{b(r)}$$

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{r}\, e^{-b(r)} \frac{d}{dr}$$

Also (8.31) äquivalent zu

$$\frac{d^2}{d\xi^2} e^{a} = e^{a} \frac{1}{r} \frac{G}{c^2} \frac{d}{dr}\left(\frac{M}{r^3}\right) \qquad (8.38)$$

Da nach dem Korollar $\rho' \leq 0$ wächst $M(r) = 4\pi \int_0^r dr'\, r'^2 \rho(r')$ mit r schwächer als r^3 und gleich r^3 für $\rho =$ konst. Also ist

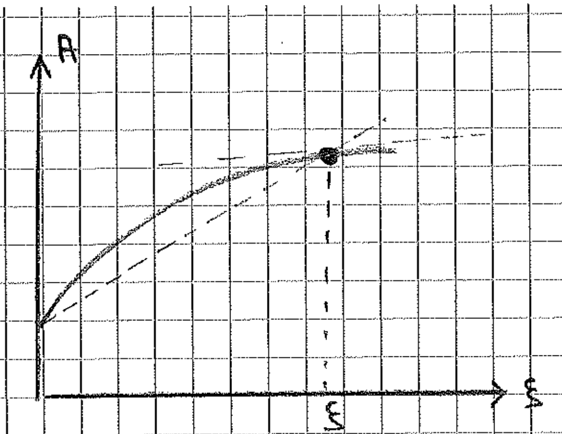
$$\frac{d}{dr}\left(\frac{M(r)}{r^3}\right) \leq 0 \qquad (8.39)$$

mit Gleichheit für $\rho =$ konst.

Also

$$\frac{d^2}{d\xi^2} A \leq 0 \qquad (8.40)$$

mit $A := e^{a}$, mit Gleichheit für $\rho =$ konst.



Tangente bei ξ ist flacher als Sekante durch $(0, A(0))$ und $(\xi, A(\xi))$, mit Gleichheit $\Leftrightarrow$ $A'' = 0$ $\Leftrightarrow$ $\rho =$ konst.

$$\Rightarrow \quad \frac{dA(\xi)}{d\xi} \leq \frac{A(\xi) - A(0)}{\xi} \qquad (8.41)$$

Wegen

$$a' = \frac{G}{c^2} \frac{M(r) + 4\pi r^3 p(r)/c^2}{r^2 \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)} \qquad (8.6)$$

und der Randbedingung

$$e^{a(R)} = e^{-b(R)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 R} > 0 \qquad (8.42)$$

ist $a' > 0$ für $p > 0$ und endlich falls p endlich. In diesem Fall ist $A(\xi = 0) = e^{a(r=0)} > 0$. $A(0) = 0$ $\Leftrightarrow$ $a(r \to 0) = -\infty$, wozu $p(r \to 0) \to \infty$ notwendig ist, wie im Fall $\rho =$ konst für $R = \frac{9}{8} r_s$. Also

$$A(0) \geq 0 \qquad (8.43)$$

mit Gleichheitszeichen $\Leftrightarrow$ $\rho =$ konst und $R = \frac{9}{8} r_s$ (vgl. (6.39) und (6.44)).

Somit

$$\frac{1}{A(\xi)} \frac{dA(\xi)}{d\xi} \leq \frac{1}{\xi} \qquad (8.44)$$

mit Gleichheit falls $\rho =$ konst und $R = \frac{9}{8} r_s$.

Schreibt man wieder $A = e^a$, und ersetzt ξ durch r gemäß (8.37), so ist (8.8) äquivalent zu

$$\left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1/2} \frac{1}{r} a' \leq \left[\int_0^r dr' \, r' \left(1 - \frac{2GM(r')}{c^2 r'}\right)^{-1/2} \right]^{-1} \qquad (8.45)$$

Da $\frac{M(r)}{r^3}$ nicht ansteigt, ist

$$\frac{M(r')}{r'^3} \geq \frac{M(r)}{r^3} \quad \text{für} \quad r' \leq r$$

bzw
$$\frac{M(r')}{r'} \geq \frac{M(r)}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \quad \text{für} \quad r' \leq r$$

[Gleichheit $\forall\, r' < r$ wieder $\Leftrightarrow \rho =$ konst.]

$$\Rightarrow \int_0^r dr' \, r' \left(1 - \frac{2GM(r')}{r'}\right)^{-1/2}$$

$$\geq \int_0^r dr' \, r' \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r^3} r'^2\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{c^2 r^3}{2GM(r)} \left[1 - \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{1/2}\right]$$

Eingesetzt in (8.9):

$$\left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{1/2} \frac{1}{r} a' \leq \frac{2GM(r)}{c^2 r^3} \left[1 - \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{1/2}\right]^{-1} \qquad (8.46)$$

Ersetzt man dann a' gemäß (8.5), so hat man

$$\left[a' = G\cdot c^{-2}\cdot\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} r^{-2}\left(M+4\pi r^3 p/c^2\right)\right]$$

$$\frac{G}{c^2}\;\frac{M(r)/r + 4\pi r^2 p(r)/c^2}{r^2\left(1-\frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{1/2}}$$

$$\leq \frac{2GM(r)}{c^2 r}\;\frac{1}{r^2}\left[1-\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2}\right]^{-1} \qquad (8.47)$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{GM(r)}{c^2\, r} =: x\,, \qquad (8.48a)$$

$$\frac{G}{c^4}\,4\pi r^2 p(r) = a\,; \qquad (8.48b)$$

dann ist (8.11) äquivalent zu

$$\frac{x+a}{(1-2x)^{1/2}} \leq 2x\left[1-(1-2x)^{1/2}\right]^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\quad (x+a)\left[1-(1-2x)^{1/2}\right] \leq 2x\,(1-2x)^{1/2}$$

$$(x+a) \leq (3x+a)\,(1-2x)^{1/2}$$

$$(3x+a)^2\,(1-2x) - (x+a)^2 \geq 0$$

$$\cancel{9x^2} + 6xa + \cancel{a^2} - 18x^3 - 12x^2 a - 2xa^2 - \cancel{x^2} - 2xa - \cancel{a^2} \geq 0$$

$$-18x^3 + x^2(8-12a) + x(4a-2a^2) \geq 0$$

Da $X > 0$ können wir diese Gleichung durch $-18X$ dividieren, wobei $\geq$ in $\leq$ übergeht, und erhalten

$$f(X) := X^2 - \frac{4}{9}\left(1 - \frac{3}{2}a\right)X - \frac{2}{9}a\left(1 - \frac{a}{2}\right) \leq 0 \qquad (8.49)$$

Da $f(X \to \pm\infty) \to +\infty$ bedeutet dies, daß X zwischen den beiden Nullstellen des quadratischen Polynoms f verlaufen muß.

Die Nullstellen sind

$$X_{1,2} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{3}{2}a\right) \pm \left[\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(1 - \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{2}{9}a\left(1 - \frac{a}{2}\right)\right]^{1/2}$$

Die kleinere Nullstelle ist negativ. Da wir nur an $X > 0$ interessiert sind, bleibt für uns nur $X \leq X_1$, X_1 = größere – positive – Nullstelle als Bedingung übrig.

$$X_1 = \frac{2}{9}\left\{\left(1 - \frac{3}{2}a\right) + \left[\left(1 - \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{9}{2}a\left(1 - \frac{a}{2}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

$$= \frac{2}{9}\left\{\left(1 - \frac{3}{2}a\right) + \left(1 + \frac{3}{2}a\right)^{1/2}\right\} \qquad (8.50)$$

Setzt man wieder $M(r)$ und $p(r)$ gemäß (8.12) ein so folgt

$$\boxed{\frac{2GM(r)}{c^2 r} \leq \frac{4}{9}\left\{\left(1 - 6\pi r^2 \frac{Gp(r)}{c^4}\right) + \left(1 + 6\pi r^2 \frac{Gp(r)}{c^4}\right)^{1/2}\right\}}$$

Mit Gleichheit $\Leftrightarrow$ $\rho = \text{konst}$ und $R = \frac{9}{8} r_S$. (8.51)

Beachte daß diese Gleichung $\forall r \in [0, R]$ gilt, wobei R als die kleinste Nullstelle von $p(r)$ definiert ist

1. Anwendung: Für $r = R$ ist $p(R) = 0$, also

$$\frac{2GM}{c^2 R} \leq \frac{8}{9} \quad , \quad M := M(R)$$

$$\Leftrightarrow \qquad R \geq \frac{9}{8} r_s \qquad (8.52)$$

mit Gleichheit $\Leftrightarrow$ $\rho = \text{konst}$ und $p(r=0) = \infty$
– wie bereits diskutiert.

2. Anwendung: Für $r = r_0$

$$M_0 \leq \frac{c^2}{G} \cdot \frac{2}{9} \cdot r_0 \left[\left(1 - 6\pi r_0^2 \frac{G p_0}{c^4}\right) + \left(1 + 6\pi r_0^2 \frac{G p_0}{c^4}\right)^{1/2} \right] \qquad (8.53)$$

Dies ist die Optimierung von (8.26):

$$M_0 < \frac{c^2}{2G} r_0$$

Die andere Ungleichung (8.27):

$$M_0 \geq \rho_0 \frac{4\pi}{3} r_0^3 , \qquad (8.54)$$

bleibt so bestehen, denn sie ist bereits optimal. (das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\rho = \text{konst.}$).

1. Bemerkung

(8.16) zeigt, daß $R \geq \frac{9}{8} r_s$ für alle sphärisch-symmetrischen Massenverteilungen gilt, solange die Ausgangsannahmen A1 - A6 (S. 8.2) erfüllt sind. Also gilt in diesen Fällen auch (6.50):

$$Z_{max} = 2 \qquad (8.55).$$

Wir betonen, daß für rotierende Sterne eine obere Schranke für Z neu bestimmt werden muß.

2. Bemerkung. Wir schreiben (8.53) so:

$$M_0 \leq \frac{c^2}{2G} r_0 \cdot \frac{8}{9} \cdot k(X) \qquad (8.56)$$

mit $k(X) = \frac{1}{2}\left[(1-X) + (1+X)^{1/2}\right]$

wobei $X := 6\pi r_0^2 G \rho_0 / c^4$

Die $\frac{8}{9}$ verbessert bereits marginal die alte Abschätzung, selbst bei vernachlässigbaren X. Allgemein verbessert (8.56) zusammen mit (8.54) die alten Ungleichungen (8.28 - 8.29) zu:

$$M_0 \leq \frac{c^3}{G^{3/2}} \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{3\pi \rho_0}\right)^{1/2} \cdot k^{3/2}(x)$$

$$r_0 \leq \frac{c}{G^{3/2}} \left(\frac{1}{3\pi \rho_0}\right)^{1/2} \cdot k^{1/2}(x)$$

mit $x = 6\pi r_0^2 \frac{G}{c^4} p_0$

Man beachte, daß

$$k(x) = \frac{1}{2}\left[(1-x) + (1+x)^{1/2}\right] \leq 1$$

für pos. x mit Gleichheit $\iff x = 0$

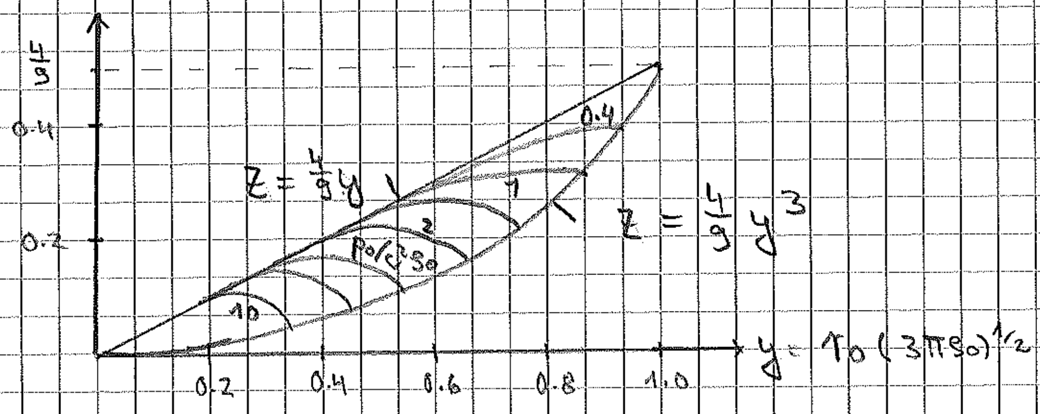
Die Funktion k hat eine Nullstelle bei $x = 3$ und es gilt $k(x) < 0$ für $x > 3$.

$x < 3 \iff$

$$2\pi r_0^2 \, G p_0 / c^4 < 1$$

$$\frac{p_0}{c^2} < \frac{c^2}{2\pi r_0^3 G}$$

$Z = M_0 (3\pi\varrho_0)^{1/2}$



Aus $M_0 \geq \frac{4\pi}{3} r_0^3 \varrho_0$ folgt

$$M_0 (3\pi\varrho_0)^{1/2} \geq \frac{4}{9} \left[r_0 (3\pi\varrho_0)^{1/2} \right]^3$$

Aus (8.56), $M_0 \leq \frac{c^2}{G} \frac{4}{9} r_0 \; k(X)$

für $X = 1$ (d.h. $p_0 = 0$) und $G = c = 1$ die obere Gerade

Bei „Einschalten" von p_0 wird die obere Massenbegrenzung durch die Rippenförmigen Kurven in Abhängigkeit vom Verhältnis p_0/ϱ_0 gegeben. (Beachte Energiedominanz? $p_0/\varrho_0 \leq 1$). Tatsächlich geht nur das Verhältnis $p_0/c^2\varrho_0$ ein, da

$$X = 6\pi r_0^2 p_0 = 6\pi \left((3\pi\varrho_0)^{1/2} r_0 \right)^2 \frac{p_0}{3\pi\varrho_0}$$

$$= 2 \frac{p_0}{\varrho_0} y^2$$

so daß

$$M_0 \leq \frac{4}{9}\, r_0 \; k(x)$$

$$\Rightarrow \; 2 \leq \frac{4}{9}\, y \; k\left(2 \frac{p_0}{\rho_0} y^2\right)$$

$$= y \cdot \frac{2}{9}\left[\left(1 - 2\frac{p_0}{\rho_0} y^2\right) + \left(1 + 2\frac{p_0}{\rho_0} y^2\right)^{1/2}\right].$$

Bestimmung von oberen Grenzwerten für die Gesamtmasse.

Nimmt man ein ρ_0 an ($\sim 5 \times 10^{17}\, kg \cdot m^{-3}$) und legt eine Zustandsgleichung zugrunde, so kann man p_0 ausrechnen und diesen Wert als Anfangsbedingung für die Gleichung $p' = \cdot\cdot$ (8.3) verwenden, deren Integration dann R als erste Nullstelle $p(R) = 0$ bestimmt. Daraus und aus $M(r)$ folgt dann die Gesamtmasse

$$M = M_0 + \int_{r_0}^{R} 4\pi r^2 \rho(r)\, dr$$

Abschätzungen an M_0 ergeben somit obere Schranken an M. Eine optimale obere Schranke ist $\sim 5 M_\odot$ falls A6 <u>nicht</u> gilt (also $dp/d\rho \geq c^2$ sein darf) und bei Gültigkeit von A6 $M \leq 3 M_\odot$. Zugrunde gelegt wird dabei eine Zustandsgleichung

Für den Mantel von Baym, Bethe, Pethick und Sutherland („Neutron Star Matter", Nuclear Physics A 175 (1971), 225-271).

Es ergibt sich (Co c wieder da)

$$\frac{p_0}{c^2 \varrho_0} \cong 0.016 \ll 1$$

und ein Beitrag des Mantels zur Gesamtmasse von weniger als 1%. Also $M \cong M_0$, $k(x) \cong 1$ und

$$M \leq \frac{c^3}{G^{3/2}} \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{3\pi \varrho_0}\right)^{1/2}$$

bzw $\quad M \leq 6.8 \left(\frac{\varrho_{nucl}}{\varrho_0}\right)^{1/2} M_\odot$

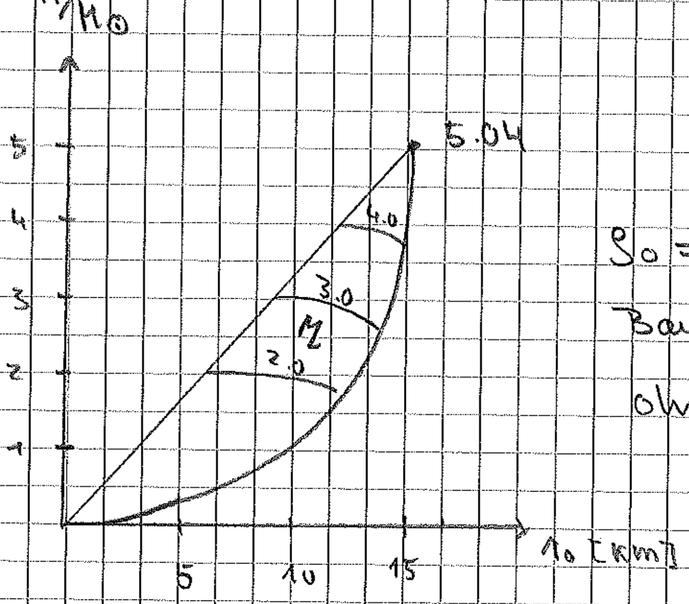
falls $dp/d\varrho \leq c^2$ (A6) nicht angenommen wird, und

$$M \leq 4.0 \left(\frac{\varrho_{nucl}}{\varrho_0}\right)^{1/2} M_\odot$$

bei Annahme von A6 (Schallgeschw. $\leq c$). Hier ist

$$\varrho_{nucl} = 2.8 \times 10^{17} \ \mathrm{Kg \cdot m^{-3}}$$

= Massendichte in Atomkernen.



$\rho_0 = 5 \times 10^{17}\ kg \cdot m^{-3}$

Baym et. al. Zustandsgl.

ohne $dp/d\rho \leq c^2$ Annahme