9. Vorlesung:

Die maximale Erweiterung der äußeren Schwarzschild Metrik und ihre globalen Eigenschaften (Kruskal Raumzeit)

$$g = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d^2\Omega \qquad (9.1)$$

Im Folgenden unterdrücken wir die θ, φ Koordinaten.

Radiale Lichtstrahlen genügen

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0$$

$$c\,dt = \pm \frac{dr}{1-\frac{r_s}{r}} = \pm\, dr_* \qquad (9.2)$$

$$r_* = \int \frac{dr}{1-\frac{r_s}{r}} = \int \frac{dr\, r}{r-r_s}$$

$$= r_s \underbrace{\int \frac{dy\, y}{y-1}}_{(y-1)+\ln(y-1) \quad \text{für } y>1} \qquad y = \left(\frac{r}{r_s}-1\right)$$

$$r_* = r - r_s + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s}-1\right) + c$$

Meist wählt man $c = r_s$ so daß

$$r_* = r + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s}-1\right) \qquad r > r_s \qquad (9.3)$$

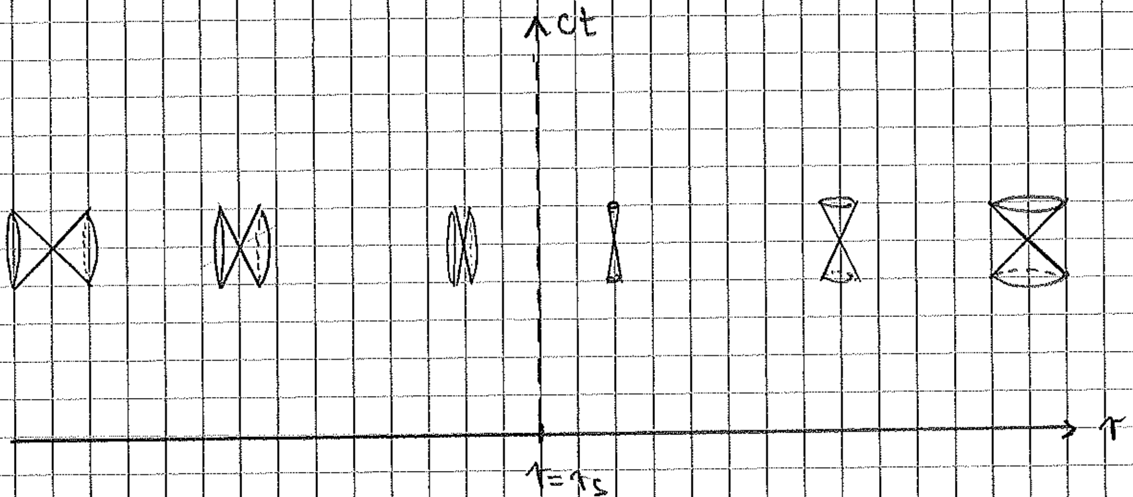
Beachte: $r_* \to -\infty$ für $r \searrow r_s$.

Lichtkegelstruktur in r-t Koordinaten

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 \left[1 - \left(\frac{dr}{dct}\right)^2 \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-2}\right]$$

> 0 für $|c\,dt| > |dr/(1-\frac{r_s}{r})|$
und $r > r_s$ → zeitartig

< 0 für $|c\,dt| > |dr/(1-\frac{r_s}{r})|$
und $r < r_s$ → raumartig



Wir suchen ein Koordinatensystem, in dem sich der Lichtkegel beim Übergang von $r > r_s$ nach $r < r_s$ regulär verhält. Das ist sicher der Fall, wenn das Koordinatensystem bzgl. des t-r Anteils konform flach ist:

$$g = f^2(u,v)\,(dv^2 - du^2) - r^2\, d\Omega^2 \qquad (9.4)$$

denn dann ist bezgl. v, u-Koord. der Lichtkegel immer durch $dv = \pm du$ gegeben, sofern $f \neq 0$.

Ist (9.1) die gleiche Metrik wie (9.4) im Bereich $r > r_S$, so muß dort gelten

$$f^2 (v_{ct}^2 - u_{ct}^2) = 1 - \frac{r_S}{r} \qquad (9.5a)$$

$$f^2 (v_r^2 - u_r^2) = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \qquad (9.5b)$$

$$v_{ct} v_r - u_{ct} u_r = 0 \qquad (9.5c)$$

mit $v_{ct} := \frac{\partial v}{\partial ct}$, $v_r := \frac{\partial v}{\partial r}$ etc. (9.6)

Benutzt man im Bereich $r > r_S$ die Koordinate r_* statt r, so gilt

$$g = \underbrace{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)}_{\text{Nullstelle bei } r = r_S} \left[c^2 dt^2 - dr_*^2\right] - r^2(r_*)\, d\Omega^2$$

und (9.5) wird ersetzt durch

$$v_{ct}^2 - u_{ct}^2 = F(r_*) \qquad (9.6a)$$

$$v_{r_*}^2 - u_{r_*}^2 = -F(r_*) \qquad (9.6b)$$

$$v_{ct} v_{r_*} - u_{ct} u_{r_*} = 0 \qquad (9.6c)$$

$$\text{mit } F(r_*) := \frac{1 - \frac{r_S}{r}}{f^2(u, v)} \qquad (9.7)$$

Hier setzen wir voraus, daß F nur von r_* (d.h. r) abhängt.

(9.6a) + (9.6b) ± 2 (9.6c) ergibt

$$(v_{ct} \pm v_{r*})^2 = (u_{ct} \pm u_{r*})^2 \qquad (9.8)$$

Dies wird erfüllt von

$$v_{ct} + v_{r*} = u_{ct} + u_{r*} \qquad (9.9a)$$

$$v_{ct} - v_{r*} = -(u_{ct} - u_{r*}) \qquad (9.9b)$$

und ergibt weiter

$$v_{ct} = u_{r*} \qquad (9.10a)$$

$$v_{r*} = u_{ct} \qquad (9.10b)$$

Die Jacobi-Determinante ist dann

$$\left|\frac{\partial(v,u)}{\partial(ct,r*)}\right| = \begin{vmatrix} v_{ct} & u_{ct} \\ v_{r*} & u_{r*} \end{vmatrix} = v_{ct} u_{r*} - u_{ct} v_{r*}$$

$$= v_{ct}^2 - v_{r*}^2 = u_{r*}^2 - u_{ct}^2$$

Aus (9.6a) − (9.6b) folgt

$$2F = v_{ct}^2 - v_{r*}^2 + (u_{r*}^2 - u_{ct}^2) = 2\left|\frac{\partial(v,u)}{\partial(ct,r*)}\right|$$

$$\neq 0 \qquad (9.11)$$

da natürlich $F \neq 0$ vorausgesetzt ist

Hätten wir im Übergang von (9.8) nach (9.9) gleiche Vorzeichen gewählt, also z. B. statt (9.9b)

$$v_{ct} - v_{r*} = u_{ct} - u_{r*}$$

so daß $v_{ct} = u_{ct}$ und $v_{r*} = u_{r*}$

So wäre die Jacobi-Determinante gleich Null:

$$v_{ct}\, u_{r_*} - u_{ct}\, v_{r_*} = 0$$

Deshalb mussten wir beim Wurzelziehen von (9.8) zwei unterschiedliche Vorzeichen wählen. Die einzige andere Möglichkeit wäre also

$$v_{ct} + v_{r_*} = - u_{ct} - u_{r_*}$$

$$v_{ct} - v_{r_*} = u_{ct} - u_{r_*}$$

also

$$v_{ct} = - u_{r_*}$$

$$v_{r_*} = - u_{ct}$$

gewesen, die aus (9.10) durch $u \to -u$ oder $v \to -v$ hervorgeht.

Aus (9.10) folgt weiter

$$v_{ctct} = u_{ctr_*} = v_{r_*r_*},$$

$$u_{ctct} = v_{r_*ct} = u_{r_*r_*},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial (ct)^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r_*} = 0 \qquad (9.12a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial (ct)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r_*^2} = 0 \qquad (9.12b)$$

$$\Rightarrow \quad v = h\,(r_* + ct) + g\,(r_* - ct)$$

$$u = \hat{h}\,(r_* + ct) + \hat{g}\,(r_* - ct)$$

(9.10) ergibt

$$h' - g' = \hat{h}' + \hat{g}'$$

$$h' + g' = \hat{h}' - \hat{g}'$$

also $h' = \hat{h}'$ und $g' = -\hat{g}'$, so daß wir $\hat{h} = h$ und $\hat{g} = -g$ wählen können:

$$v = h(\eta_* + ct) + g(\eta_* - ct) \qquad (9.13a)$$

$$u = h(\eta_* + ct) - g(\eta_* - ct) \qquad (9.13b)$$

Einsetzen in (9.6) ergibt für (9.6c):

$$(h' - g')(h' + g') - (h' + g')(h' - g') \equiv 0$$

$\Rightarrow$ identisch erfüllt!

für (9.6a):

$$(h' - g')^2 - (h' + g')^2 = F$$

$$\Leftrightarrow -4h'g' = F$$

für (9.6b)

$$(h' + g')^2 - (h' - g')^2 = -F$$

$$\Leftrightarrow 4h'g' = -F$$

Also ist (9.6) äquivalent zu

$$-4\,h'(r_* + ct)\,g'(r_* - ct) = F(r_*) \qquad (9.14)$$

Für $r > r_s$ ist $F > 0$. Differentiation von (9.14) nach r_* und ct ergibt

$$-4\,(h''g' + h'g'') = F' \qquad (9.15a)$$

$$-4\,(h''g' - h'g'') = 0 \qquad (9.15b)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h''}{h'} + \frac{g''}{g'} = \frac{F'}{F} \qquad (9.16a)$$

$$\frac{h''}{h'} - \frac{g''}{g'} = 0 \qquad (9.16b)$$

$$\Rightarrow \quad 2\,\frac{h''}{h'} = \frac{F'}{F} \qquad (9.17)$$

Da r_* und $r_* + ct$ unabhängige Variablen sind, müssen beide Seiten gleich einer Konstanten 2η sein.

$$\frac{h''}{h'} = \frac{g''}{g'} = \eta$$

Bei Vorzeichenwahl ($h > 0$, $g < 0$) geht $F > 0$ ein. Für $r < r_s$, also $F < 0$ ist das zu ändern.

$$h(r_* + ct) = \frac{1}{2}\exp[\eta(r_* + ct)] \qquad (9.18a)$$

$$g(r_* - ct) = -\frac{1}{2}\exp[\eta(r_* - ct)] \qquad (9.18b)$$

Dies erfüllt (9.15b). (9.15a) wird erfüllt für

$$F(r_*) = \eta^2 \exp(2\eta r_*) \qquad (9.19)$$

Also ergibt sich für u und v

$$u = h(r_* + ct) - g(r_* - ct)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\exp[\eta(r_* + ct)] + \exp[\eta(r_* - ct)]\right\}$$

$$= \exp(\eta r_*) \cosh(\eta ct)$$

Mit $r_* = r + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)$

$$\Rightarrow u = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{\eta r_s} \exp(\eta r) \cosh(\eta ct) \qquad (9.20a)$$

$$v = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{\eta r_s} \exp(\eta r) \sinh(\eta ct) \qquad (9.20b)$$

Die Funktion $f(u,v)$ ergibt sich aus (9.7)

$$F(r_*) = \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{f^2(u,v)}$$

$$f^2(u,v) = \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{F(r_*)} = \frac{r_s}{r} \frac{\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)}{\eta^2 \exp(2\eta r_*)}$$

$$= \frac{r_s}{\eta^2 r} \exp(-2\eta r) \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1 - 2\eta r_s} \qquad (9.20)$$

Damit f bei $r = r_s$ nicht verschwindet müssen wir

$$\eta = \frac{1}{2 r_s} \qquad (9.21)$$

wählen. Dadurch entstehen aus (9.20) die Kruskal-Transformationen.

$$u = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \qquad (9.22a)$$

$$v = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \qquad (9.22b)$$

$$f = 4\,\frac{r_s^3}{r}\, e^{-r/r_s} \qquad (9.22c)$$

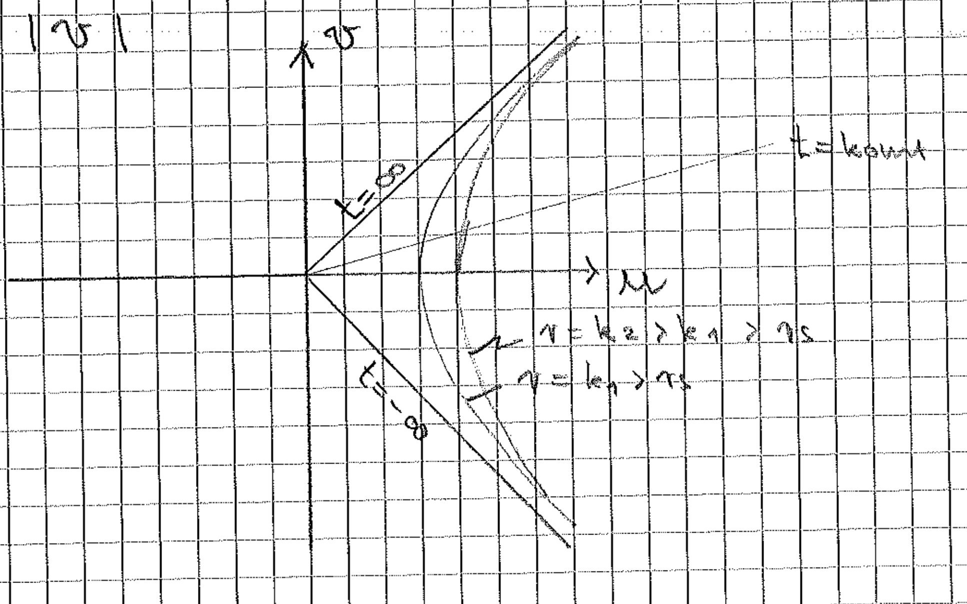
Beachte, daß die Umkehrungen eindeutig sind:

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right) e^{r/r_s} =: A(r/r_s) \qquad (9.23a)$$

$= \text{monoton für } r > 0$

$$\frac{v}{u} = \tanh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \qquad (9.23b)$$

In der u-v Ebene sind die Kurven $r = \text{konst}$ und $t = \text{konst}$ durch Hyperbeln bzw. Geraden gegeben. Die ursprüngliche Region $r > r_s$ entspricht in der u-v Ebene dem Quadranten $u > |v|$



Für den Bereich $r < r_s$ ist

$$F(r_*) = \frac{1-\frac{r_s}{r}}{f^2(u,v)} < 0 \qquad (9.24)$$

In diesem Fall können wegen (9.14):

$-4\,h'g' = F$, h und g das gleiche Vorzeichen haben, z.B. positiv, also statt (9.18)

$$h(r_* + ct) = \tfrac{1}{2} \exp[\eta(r_* + ct)] \qquad (9.25a)$$

$$g(r_* - ct) = \tfrac{1}{2} \exp[\eta(r_* - ct)] \qquad (9.25b)$$

und $\quad F(r_*) = -\eta^2 \exp(2\eta r_*) \qquad (9.26)$

Außerdem wählt man

$$r_* = r + r_s \ln\left(1 - \frac{r}{r_s}\right) \qquad (9.27)$$

so daß, analog zu oben,

$$u = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{\eta r_s} \exp(\eta r) \sinh(\eta ct) \qquad (9.28a)$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{\eta r_s} \exp(\eta r) \cosh(\eta ct) \qquad (9.28b)$$

$$f^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \Big/ F(r_*) = \frac{r_s}{r}\left(1 - \frac{r}{r_s}\right) \Big/ \eta^2 \exp(2\eta r_*)$$

$$= \frac{r_s}{\eta^2 r} \exp(-2\eta r) \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1-2\eta r_s} \qquad (9.28c)$$

Hier wählt man wieder $\eta = 1/2r_s$ (9.21)

Für $r < r_s$ bekommt man dann statt (9.22)

$$u = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \quad (9.29a)$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \quad (9.29b)$$

$$f^2 = 4 \frac{r_s^3}{r} e^{-r/r_s} \quad (9.29c)$$

Die Umkehrungen sind hier

$$v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right) e^{r/r_s} =: B\left(\frac{r}{r_s}\right) \quad (9.30a)$$

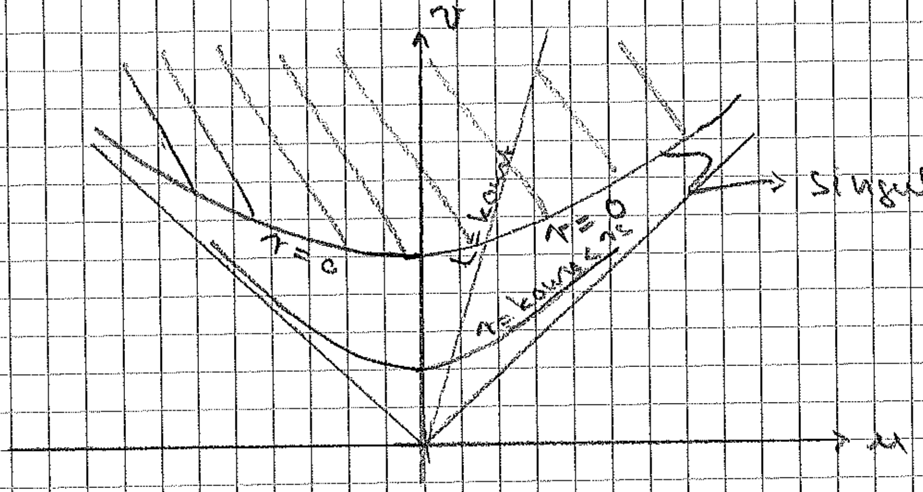
$$= -A(r/r_s)$$

$$\frac{u}{v} = \tanh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \quad (9.30b)$$

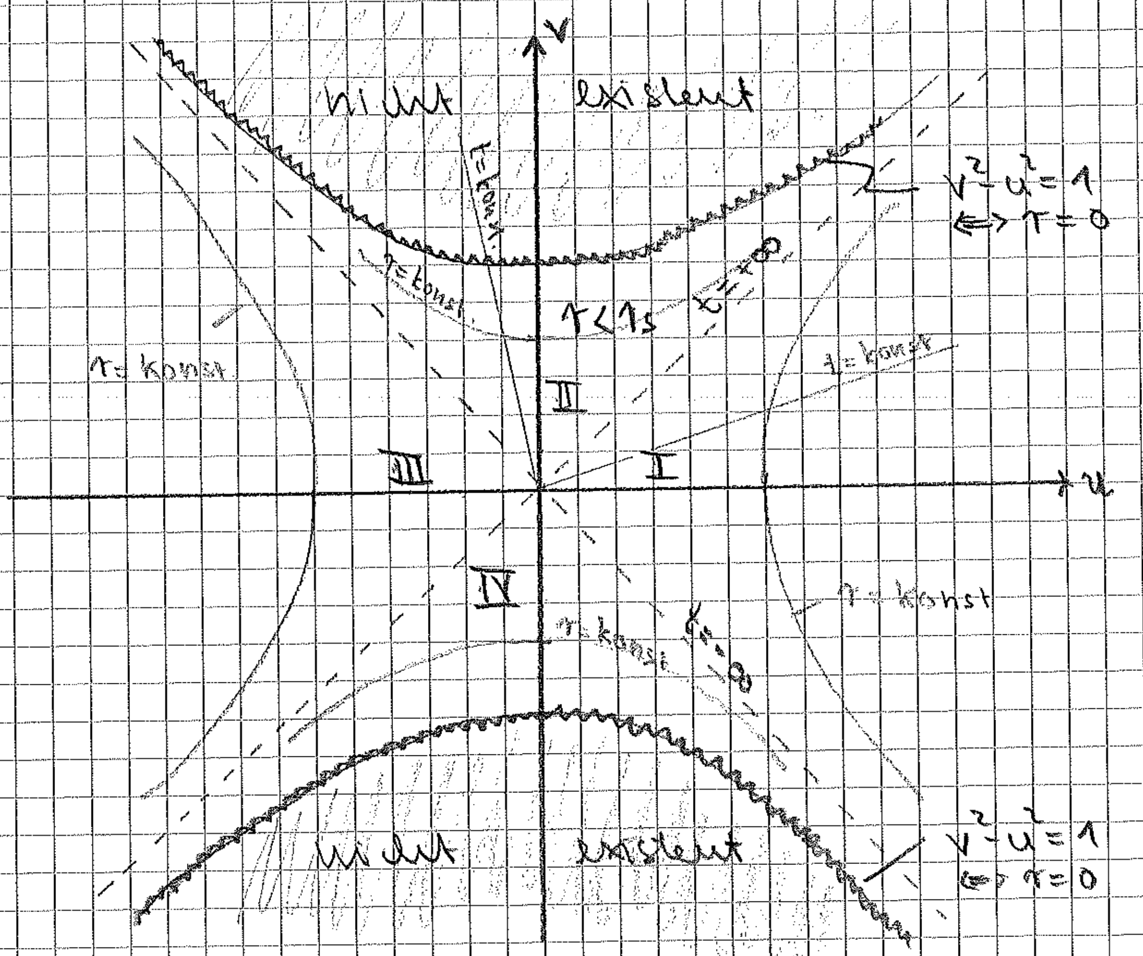
In der u-v sind die Kurven r = konst und t = konst wieder Hyperbeln und Geraden, wobei die Region $r < r_s$ im Quadranten $v > |u|$ liegt. und durch die Grenz-hyperbel $r = 0 \iff$

$$v^2 - u^2 = 1 \quad (9.31)$$

berandet wird. Auf dieser wird die Krümmung ∞ (wie in (7.38) gezeigt)



Außerdem hätten wir statt h und g $-h$ und $-g$ wählen können, also statt unserer u, v, $-u$ und $-v$, so daß wir zwei weitere jeweils zu $u > |v|$ und $v > |u|$ isometrische Regionen $-u > |v|$ und $-v > |u|$ bekommen.



Kruskal Mannigfaltigkeit (M_K, g_K)

$$M_K \cong \mathcal{U}^2 \times S^2$$

"überdeckt durch eine Karte" (v, u, θ, φ)
[für Winkelanteil θ, φ bräuchte man eigentlich 2 Karten; z.B. Stereogr. Proj.]

mit

$$\mathcal{U} = \{(v, u) \in \mathbb{R}^2 \mid v^2 - u^2 < 1\} \underset{\text{top.}}{\cong} \mathbb{R}^2 \qquad (9.32)$$

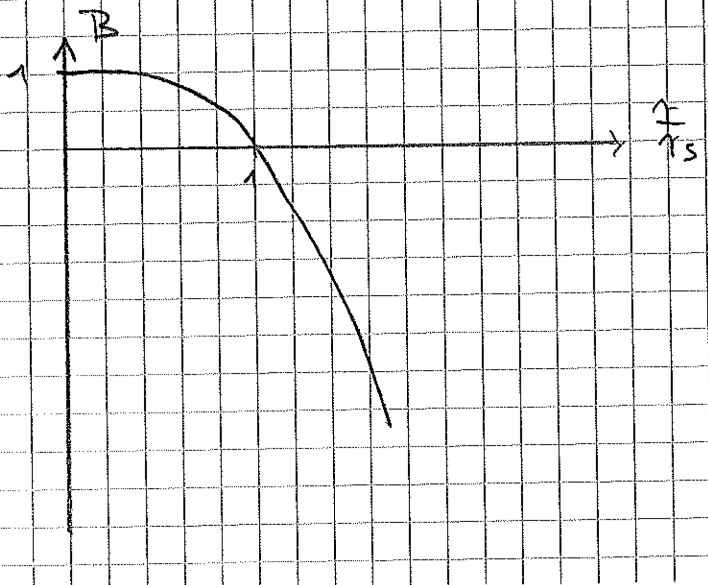
und

$$g_K = 4 \frac{r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) \qquad (9.33)$$

wobei r Funktion von (u, v), die sich aus

$$v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right) e^{r/r_s} = B\left(\frac{r}{r_s}\right) \qquad (9.34)$$

ergibt



Wir unterteilen $\mathcal{U}$ in die 4 Regionen

Region I: $u > |v|$

Region II: $v > |u|$

Region III: $-u > |v|$

Region IV: $-v > |u|$

Regionen I und III sind jeweils isometrisch zur äußeren Schwarzschild-Mannigfaltigkeit für $r > r_s$, Regionen II und IV für $r < r_s$. Die Isometrien sind gegeben durch $(t, r) \to (u(t,r), v(t,r))$ mit

$$\left.\begin{aligned} u &= \pm\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \\ v &= \pm\left(\frac{r}{r_s}-1\right) e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+ \text{ für I} \\ &- \text{ für III} \end{aligned} \qquad (9.35a)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \pm\left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \\ v &= \pm\left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+ \text{ für II} \\ &- \text{ für IV} \end{aligned} \qquad (9.35b)$$

Regionen I und III entsprechen asymptotisch flachen Raumzeiten, wie Schwarzschild für $r > r_s$, Regionen II und IV dem Inneren $0 < r < r_s$. Die Metrik g_K ist in ganz $\mathcal{U}$ regulär und beinhaltet so alle vier Regionen "gleichzeitig" und mit glatten Übergängen

Das Killingfeld $K = \frac{\partial}{\partial t}$ ist in (u,v)-Koordinaten gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v}$$

$$= \frac{c}{2r_s}\left(v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

und zwar in allen 4 Regionen

Es ist zeitartig in $\underline{I}$ u. $\underline{III}$ und raumartig in $\underline{II}$ u. $\underline{IV}$

Da r von v und u nur durch die Kombination v^2-u^2 abhängt, und sonst keine Abhängigkeiten von (u,v) in der Metrik (9.33) bestehen als die durch r, sind die Spiegelungen

$$T_v : (v,u,\theta,\varphi) \to (-v,u,\theta,\varphi)$$

$$T_u : (v,u,\theta,\varphi) \to (v,-u,\theta,\varphi)$$

jeweils (orientierungs-umkehrende) Isometrien.

$T_v \circ T_u$ ist orientierungserhaltend und läßt auch das Killingfeld $\frac{\partial}{\partial t}$ invariant, hat aber die 2-Sphäre $u=v=0$ als Fixpunkte.