

Mathematische Ergänzungen zur Vorlesung  
*Ergänzungen zur klassischen Physik*  
WS 2016/17

Domenico Giulini  
Institut für Theoretische Physik  
Appelstraße 2  
30167 Hannover

In dieser Sammlung von Ergänzungen stellen wir einige elementare aber nützliche mathematische Dinge zusammen, deren Verständnis hier und in anderen Vorlesungen eigentlich immer vorausgesetzt wird, deren Erklärung aber oft weiterdelegiert wird – nicht selten im Kreis.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektorräume mit innerem Produkt</b>	<b>2</b>
1.1	Reelle und komplexe Vektorräume . . . . .	2
1.2	Innere Produkte . . . . .	8
1.3	Index Hoch- und Runterziehen . . . . .	10
1.4	Adjungierte Abbildungen . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Symmetrien innerer Produkte</b>	<b>15</b>
2.1	Lie Algebren allgemein . . . . .	15
2.2	Lie-Gruppen und -Algebren, die symmetrische oder antisymmetrische innere Produkte invariant lassen . . . . .	16
2.3	Basen der Lie-Algebren und die Lie-Produkte ihrer Elemente . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Die Exponentialabbildung</b>	<b>18</b>
3.1	Einparametrische Untergruppen . . . . .	19
3.2	Identifikation mit Matrixgruppen . . . . .	20
3.3	Injektivität und Surjektivität . . . . .	20

# Kapitel 1

## Vektorräume mit innerem Produkt

### 1.1 Reelle und komplexe Vektorräume

Im Folgenden betrachten wir endlichdimensionale Vektorräume über  $\mathbb{F}$ , wobei  $\mathbb{F}$  entweder für  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  steht. Dann bezeichnet  $V^*$  den Dualraum, d.h. den  $\mathbb{F}$ -Vektorraum aller  $\mathbb{F}$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $\mathbb{F}$ .  $V$  und  $V^*$  sind von gleicher Dimension und folglich isomorph. Diese Isomorphie ist aber nicht natürlich (oder kanonisch), d.h. es existiert kein *ausgezeichneter* Isomorphismus. Vielmehr ist jeder Isomorphismus mit der Wahl einer nicht-ausgearteten Bilinearform auf  $V$  eineindeutig assoziiert. Davon wird weiter unten ausgiebig die Rede sein. Wir bezeichnen Vektoren in  $V$  mit kleinen lateinischen Buchstaben, wie  $a, b, \dots, u, v, w$ , und Vektoren in  $V^*$  mit kleinen griechischen Buchstaben, wie  $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \nu$ .

**Definition 1.** Sind  $V$  und  $W$  zwei Vektorräume über  $\mathbb{F}$ , dann ist die Menge  $\text{Lin}(V, W)$  der  $\mathbb{F}$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  selbst ein Vektorraum über  $\mathbb{F}$ : Sind  $f_{1,2} \in \text{Lin}(V, W)$  und  $\alpha \in \mathbb{F}$ , dann  $(f_1 + \alpha f_2)(v) := f_1(v) + \alpha f_2(v)$  für alle  $v \in V$ . Ist  $W = V$ , dann heißt die Menge

$$\text{End}(V) := \text{Lin}(V, V) \tag{1.1}$$

die *Endomorphismen* von  $V$ .  $\text{End}(V)$  ist eine assoziative Algebra mit Identität, wobei die Multiplikation durch die Komposition der Abbildungen gegeben ist und die Identität durch die Identitätsabbildung. Die Untermenge

$$\text{GL}(V) := \{X \in \text{End} \mid \det(X) \neq 0\} \subset \text{End}(V) \tag{1.2}$$

der invertierbaren Endomorphismen bilden keine Algebra mehr, dafür aber eine Gruppe, wobei die Gruppenmultiplikation wieder die Komposition von Abbildungen ist und das neutrale Element die Identitätsabbildung ( $\text{End}(V)$  selbst ist keine Gruppe bezüglich

der Komposition, da das Inverse i.A. nicht existiert). Sie heißt die *allgemeine lineare Gruppe* von  $V$  (englisch: General Linear Group).

Der zu  $V^*$  duale Raum  $V^{**}$  ist wegen der Dimensionsgleichheit ebenfalls zu  $V$  isomorph, diesmal aber sogar natürlich (oder kanonisch). Der natürliche Isomorphismus (der also ohne Angabe weiterer Strukturen auskommt) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} i : V &\rightarrow V^{**} \quad (\text{linear}) \\ v \mapsto i(v) : \alpha &\mapsto i(v)(\alpha) := \alpha(v) \quad \forall \alpha \in V^*. \end{aligned} \quad (1.3)$$

In Zukunft werden wir  $V^{**}$  und  $V$  mehr oder weniger stillschweigend identifizieren.

Ist  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  so existieren neben  $V$  und  $V^*$  zwei weitere zu  $V$  assoziierte komplexe Vektorräume gleicher Dimension, nämlich der zu  $V$  komplex-konjugierte Vektorraum  $\bar{V}$  und sein Dualraum  $\bar{V}^*$ . Im Hinblick auf die Identifikation von  $V$  mit  $V^{**}$  charakterisieren wir  $\bar{V}$  als den Vektorraum der *anti*-linearen Abbildungen  $V^* \rightarrow \mathbb{C}$ . Wieder gilt, dass  $\bar{V}$  zwar isomorph aber nicht natürlich-isomorph zu  $V$  ist. Allerdings existiert ein natürlicher Anti-Isomorphismus, d.h. eine anti-lineare Bijektion zwischen diesen Räumen, die gegeben ist durch (Überstreichen einer komplexen Zahl bezeichnet ihr Komplex-Konjugiertes)

$$\begin{aligned} j : V &\rightarrow \bar{V} \quad (\text{anti-linear}) \\ v \mapsto j(v) : \alpha &\mapsto j(v)(\alpha) := \overline{\alpha(v)} \quad \forall \alpha \in V^*. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Statt  $j(v)$  schreibt man auch oft einfach  $\bar{v}$ , muss sich jedoch klar machen, dass der in diesem Sinne zu  $v$  „komplex-konjugierte“ Vektor nicht wieder in  $V$  sondern einem davon verschiedenen (nicht natürlich isomorphen) Vektorraum  $\bar{V}$  liegt.

**Bemerkung 2.** Es gibt weitere natürliche Isomorphismen  $(\bar{V})^* \cong \overline{V^*}$ , also zwischen dem Dualraum von  $\bar{V}$  und dem komplex-konjugierten von  $V^*$ , sowie  $\bar{\bar{V}} \cong V$ , also dem doppelt komplex-konjugierten von  $V$  und  $V$  selbst. Nach Identifikation dieser natürlich isomorphen Räume ist die Reihe der zum komplexen Vektorraum  $V$  natürlich assoziierten komplexen Vektorräume gleicher Dimension mit  $V^*$ ,  $\bar{V}$  und  $\bar{V}^*$  also erschöpft. Natürlich kann man dann noch beliebige Tensorprodukte zwischen diesen vier Vektorräumen bilden, was aber außer für  $\dim(V) = 1$  zu höherdimensionalen Vektorräumen führt.  $\square$

Der allgemeine strukturelle Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Vektorräumen wird in der Physik sehr häufig verwischt, was zu irritierenden und bisweilen auch falschen Aussagen führt. Der Wechsel zwischen den Grundkörpern  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  kann auf verschiedene Weisen geschehen, die jeweils an das Vorliegen bestimmter struktureller Vorgaben gebunden sind. Diese strukturellen Vorgaben müssen klar und eindeutig benannt werden.

**Definition 3.** Sei  $V$  reeller Vektorraum. Eine *komplexe Struktur* auf  $V$  ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Selbstabbildung

$$J : V \rightarrow V, \quad \text{mit} \quad J \circ J = -\text{id}_V. \quad (1.5)$$

Eine sofortige Folge von  $J \circ J = -\text{id}_V$  ist, dass  $-J = J^{-1}$ , insbesondere ist also  $J$  ein  $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus. Eine weitere sofortige Folge von  $J \circ J = -\text{id}_V$  erhält man durch Determinantenbildung auf beiden Seiten:  $[\det(J)]^2 = (-1)^{\dim(V)}$ . Also muss  $\dim(V)$  gerade sein (da  $\det(J) \in \mathbb{R}$ ). Komplexe Strukturen existieren also nur in reellen Vektorräumen gerader Dimension.  $\square$

**Bemerkung 4.** Ist  $(V, J)$  ein reeller Vektorraum mit komplexer Struktur, so kann man  $V$  zu einem komplexen Vektorraum  $V_{\mathbb{C}}$  machen, indem man die skalare Multiplikation mit Elementen aus  $\mathbb{C}$  so erklärt: Sei  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  und  $v \in V$ ; dann  $zv := av + bJ(v)$ . Man beachte, dass  $V$  und  $V_{\mathbb{C}}$  als Mengen und Abel'sche Gruppen (mit  $+$  als Gruppenmultiplikation) identisch sind. Lediglich die skalare Multiplikation wird mit Hilfe der Abbildung  $J$  von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{C}$  erweitert. Die komplexe Dimension von  $V_{\mathbb{C}}$  ist dann gleich der halben reellen Dimension von  $V$ . Es gilt also

$$V_{\mathbb{C}} := \{V \mid \mathbb{C}\text{-Multiplikation erklärt durch } (a + ib)v := av + bJ(v)\}. \quad (1.6a)$$

mit

$$\dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2} \cdot \dim_{\mathbb{R}}(V). \quad \square \quad (1.6b)$$

**Definition 5.** Sei  $V$  komplexer Vektorraum. Eine *reelle Struktur* auf  $V$  ist eine anti-lineare Involution von  $V$  auf sich, also eine anti-lineare Abbildung

$$C : V \rightarrow V \quad \text{mit} \quad C \circ C = \text{id}_V. \quad (1.7)$$

Die Abbildung  $C$  heißt *komplexe Konjugation*.  $\square$

**Bemerkung 6.** Ist  $(V, C)$  ein komplexer Vektorraum mit reeller Struktur, dann heißt ein Vektor  $v \in V$  *reell* wenn  $C(v) = v$ . Die Menge der reellen Vektoren bildet einen  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $V_{\mathbb{R}}$ . Es gilt also:

$$V_{\mathbb{R}} := \{v \in V \mid C(v) = v\}, \quad (1.8a)$$

mit

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}) = \dim_{\mathbb{C}}(V). \quad \square \quad (1.8b)$$

**Bemerkung 7.** Ohne reelle Struktur können wir in einem komplexen Vektorraum nicht „komplex konjugieren“ und wissen nicht, was reelle Vektoren sind. Eine reelle Struktur ist z.B. dadurch festgelegt, dass eine Basis  $B := \{e_{\alpha} \mid \alpha = 1, \dots, n\}$  ausgezeichnet und als reell erklärt wird. In *dieser* Basis gilt dann offensichtlich  $C(v^{\alpha} e_{\alpha}) := \overline{v^{\alpha}} e_{\alpha}$ . Wendet man diese Regel, gemäß der einfach die Entwicklungskoeffizienten eines Vektors als Elemente in  $\mathbb{C}$  zu komplex-konjugieren sind, bezüglich einer anderen Basis an, so ergibt sich dadurch nur dann die gleiche reelle Struktur, wenn die neuen Basisvektoren *reelle* Linearkombinationen der alten sind. Allgemein gilt: Ist  $C$  eine reelle Struktur und  $T : V \rightarrow V$  ein  $\mathbb{C}$ -linearer Isomorphismus, dann ist auch  $C' := T \circ C \circ T^{-1}$  eine reelle Struktur. Diese ist genau dann mit  $C$  identisch, wenn  $T(V_{\mathbb{R}}) = V_{\mathbb{R}}$ . Weiter gilt: Ist  $C$  reelle Struktur, dann ist  $K := j \circ C$  mit  $j$  aus (1.4) ein  $\mathbb{C}$ -linearer Isomorphismus  $K : V \rightarrow \tilde{V}$ . Ist umgekehrt  $K$  ein solcher Isomorphismus, so dass  $j^{-1} \circ K =: C$  eine Involution ist, dann ist  $C$  reelle Struktur. In diesem Sinne ist die Wahl eine reellen

Struktur gleichbedeutend der Wahl eines  $\mathbb{C}$ -linearen Isomorphismus  $K : V \rightarrow \bar{V}$ . Dieser ist dann die oben zitierte „komplexe Konjugation“ in  $V$  die eben neben der natürlich existierenden *anti-linearen* Bijektion  $j : V \rightarrow \bar{V}$  nötig ist um von „reellen Vektoren in  $V^{\mathbb{C}}$ “ sprechen zu können.  $\square$

Wir haben oben in (1.6) und (7) gesehen, wie man aus reellen und komplexen Vektorräumen komplexe bzw. reelle Vektorräume macht, wenn in den Ausgangsräumen komplexe bzw. reelle Strukturen ausgezeichnet sind. Ist letzteres nicht der Fall, sind folgende Konstruktionen möglich.

Hat ein reeller Vektorraum  $V$  keine komplexe Struktur im Sinne der Definition 3, sei es weil man entweder keine benannt hat oder weil er strukturell keine zulässt (wenn er von ungerader Dimension ist), dann kann man dennoch aus ihm einen komplexen Vektorraum bauen indem man seine Dimension über  $\mathbb{R}$  zunächst verdoppelt und zwar so, dass diese Verdoppelung eine natürliche komplexe Struktur besitzt. Das geht so: Zunächst erinnert man sich, dass der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum ist. Es ist daher sinnvoll, das reelle Tensorprodukt  $\mathbb{C} \otimes V$  der beiden reellen Vektorräume  $\mathbb{C}$  und  $V$  zu bilden. Dieses ist dann wieder ein reeller Vektorraum der doppelten Dimension von  $V$ ;  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{R}}(V)$ . Dieser hat nun aber eine komplexe Struktur  $J$ , nämlich indem man  $J(z \otimes v) := (iz) \otimes v$  vereinbart und dies  $\mathbb{R}$ -linear auf ganz  $\mathbb{C} \otimes V$  fortsetzt. Mit diesem  $J$  kann man nun so wie in Bemerkung 4 beschrieben aus  $\mathbb{C} \otimes V$  einen komplexen Vektorraum machen.

**Definition 8.** Sei  $V$  reeller Vektorraum. Die *Komplexifizierung*  $V^{\mathbb{C}}$  von  $V$  ist

$$V^{\mathbb{C}} := (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)_{\mathbb{C}}. \quad (1.9a)$$

Dabei haben wir durch das Anhängen von  $\mathbb{R}$  an  $\otimes$  nochmals betont, dass das Tensorprodukt zwischen  $\mathbb{C}$  und  $V$  das zwischen reellen Vektorräumen ist. Klarerweise gilt

$$\dim_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(V). \quad \square \quad (1.9b)$$

Nun zum umgekehrten Fall, in dem ein komplexer Vektorraum keine reelle Struktur im Sinne der Definition 5 besitzt. Dann kann man einfach den Grundkörper dadurch wechseln, dass man die skalare Multiplikation auf die reellen Zahlen einschränkt und so den ehemals komplexen Vektorraum als reellen Vektorraum doppelter Dimension versteht.

**Definition 9.** Sei  $V$  komplexer Vektorraum. Die *Reellifizierung*  $V^{\mathbb{R}}$  von  $V$  ist der reelle Vektorraum, der als Menge und Abel'sche Gruppe identisch ist zu  $V$  und in dem die skalare Multiplikation auf  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  eingeschränkt ist. Es gilt

$$V^{\mathbb{R}} := \{V \mid \text{skalare Multiplikation auf } \mathbb{R} \text{ eingeschränkt}\} \quad (1.10a)$$

mit

$$\dim_{\mathbb{R}}(V^{\mathbb{R}}) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V). \quad (1.10b)$$

**Bemerkung 10.** Ist  $V$  komplexer Vektorraum und  $\{e_{\alpha} \mid \alpha = 1, \dots, n\}$  eine Basis von  $V$  über  $\mathbb{C}$ , dann ist  $\{e_{\lambda}, \mid \lambda = 1, \dots, 2n\}$  mit  $e_{n+\alpha} := ie_{\alpha}$  eine Basis von  $V^{\mathbb{R}}$  über  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Bemerkung 11.** Ist ein reeller Vektorraum  $V^{\mathbb{R}}$  die Reellifizierung eines komplexen Vektorraums  $V$ , so ist klar, dass er eine natürliche komplexe Struktur trägt, nämlich  $J(v) = iv$ . Letzteres ist sinnvoll, da man ja noch weiss, wie auf dem Menge  $V$  mit komplexen Zahlen zu multiplizieren ist. Es gilt dann trivialerweise

$$(V^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = V. \quad (1.11)$$

Ist es umgekehrt so, dass der komplexe Vektorraum  $V$  aus einem reellen Vektorraum  $V'$  mit komplexer Struktur  $J$  entstand, also  $V = V'_{\mathbb{C}}$ , dann ist seine Reellifizierung wieder  $V'$ . Es gilt dann

$$V^{\mathbb{R}} = (V'_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} = V'. \quad \square \quad (1.12)$$

## Natürlich assoziierte Basen und Abbildungen

**Definition 12.** Sei  $V$  komplexer Vektorraum und

$$B = \{e_a \mid a = 1, \dots, n\} \quad (1.13a)$$

Basis von  $V$ . Dann sind in  $V^*$ ,  $\bar{V}$  und  $\bar{V}^*$  in natürlicher Weise Basen  $B^*$ ,  $\bar{B}$  und  $\bar{B}^*$  wie folgt definiert: Im Dualraum  $V^*$  ist es die *duale Basis*

$$B^* = \{\eta^a \mid a = 1, \dots, n\} \quad \text{mit} \quad \eta^a(e_b) = \delta_b^a. \quad (1.13b)$$

Im komplex-konjugierten Vektorraum  $\bar{V}$  ist es die zu  $B$  komplex-konjugierte Basis  $\bar{B} := j(B)$ , d.h. das Bild der Basis  $B$  unter der natürlich definierten anti-linearen Abbildung (1.4):

$$\bar{B} = \{\bar{e}_a \mid a = 1, \dots, n\} \quad \text{mit} \quad \bar{e}_b := j(e_b). \quad (1.13c)$$

Schließlich nimmt man in  $\bar{V}^*$  die zu  $\bar{B}$  duale Basis:

$$\bar{B}^* = \{\bar{\eta}^a \mid a = 1, \dots, n\} \quad \text{mit} \quad \bar{\eta}^a(\bar{e}_b) = \delta_b^a. \quad (1.13d)$$

Man beachte, dass das Attribut „dual“ nur auf eine ganze Basis zutrifft, nicht auf einzelne Vektoren. Es gibt keinen zu  $e \in V$  definierten „dualen Vektor“  $\eta \in V^*$ . Im Unterschied dazu ist die komplex-konjugierte Basis aber elementenweise zugeordnet.  $\square$

**Definition 13.** Seien  $V$  und  $W$  komplexe Vektorräume mit natürlich assoziierten Räumen  $V^*$ ,  $\bar{V}$  und  $\bar{V}^*$  bzw.  $W^*$ ,  $\bar{W}$  und  $\bar{W}^*$ . Sei

$$f : V \rightarrow W \quad (1.14a)$$

$\mathbb{C}$ -lineare Abbildung. Dann existieren in natürlicher Weise assoziierte Abbildungen wie folgt: Die *transponierte Abbildung*

$$f^{\top} : W^* \rightarrow V^*, \quad \theta \mapsto f^{\top}(\theta) := \theta \circ f. \quad (1.14b)$$

Die *komplex konjugierte Abbildung*

$$\bar{f} : \bar{V} \rightarrow \bar{W}, \quad \bar{f} := j_W \circ f \circ j_V^{-1}, \quad (1.14c)$$

wobei  $j_V : V \rightarrow \bar{V}$  und  $j_W : W \rightarrow \bar{W}$  die anti-linearen Bijektionen nach Definition (1.4) bezeichnen. Und letztlich die *transponiert komplex-konjugierte* Abbildung

$$\bar{f}^\top : \bar{W}^* \rightarrow \bar{V}^*, \quad \bar{\theta} \mapsto \bar{f}^\top(\bar{\theta}) := \bar{\theta} \circ \bar{f}. \quad (1.14d)$$

**Bemerkung 14.** Wie bereits gleich zu Beginn erwähnt, ist die Menge  $\text{Lin}(V, W)$  der linearen Abbildungen des  $\mathbb{F}$ -Vektorraums  $V$  in den  $\mathbb{F}$ -Vektorraum  $W$  selbst ein  $\mathbb{F}$ -Vektorraum. Dieser hat die Dimension  $\dim(\text{Lin}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$ . Er besteht eine natürliche Isomorphie

$$W \otimes V^* \cong \text{Lin}(V, W) \quad (1.15a)$$

die auf reinen Tensorprodukten  $\alpha \otimes \beta \in W \otimes V^*$  gegeben ist durch

$$\alpha \otimes \beta \mapsto (V \ni v \mapsto \beta(v) \alpha \in W) \quad (1.15b)$$

und auf ganz  $W \otimes V^*$  eindeutig durch die Forderung der Linearität fortgesetzt wird. Diese erlaubt es uns, zukünftig  $\text{Lin}(V, W)$  mit  $W \otimes V^*$  zu identifizieren, was wir oft stillschweigend tun werden.

**Bemerkung 15.** Mit der Identifikation (1.15a) folgt aus (1.14b), dass für  $\alpha \otimes \beta \in \text{Lin}(V, W)$  und  $\theta \in W^*$  gilt  $(\alpha \otimes \beta)^\top(\theta) = \theta(\alpha) \beta$ . Also ist

$$(\alpha \otimes \beta)^\top = \beta \otimes \alpha. \quad (1.16)$$

Man beachte, dass diese Formel nur unter folgenden (bereits eingeführten) Identifikationen sinnvoll ist:  $\text{Lin}(W^*, V^*) \cong V^* \otimes W^{**} \cong V^* \otimes W$ .

Analog folgt für komplexe Vektorräume mit der Identifikation (1.15a) aus (1.14c), dass

$$\overline{\alpha \otimes \beta} = \bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}. \quad (1.17)$$

wobei  $\bar{\alpha} := j_W(\alpha)$  und  $\bar{\beta} := j_{V^*}(\beta) := \beta \circ j_V^{-1}$ .

**Bemerkung 16.** Im Allgemeinen ist es sinnlos, nach der „Symmetrie“ einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow W$  in Sinne von  $f = f^\top$  zu fragen, da  $f^\top : W^* \rightarrow V^*$  zwischen anderen Vektorräumen vermittelt. Dies ist nur möglich, wenn  $W = V^*$  (mit der Identifikation  $V^{**} = V$ ).

**Bemerkung 17.** Sind  $\{e_\alpha \mid \alpha = 1, \dots, n\}$  und  $\{\eta^\alpha \mid \alpha = 1, \dots, n\}$  duale Basenpaare von  $V$  und  $V^*$ , sowie  $\{E_A \mid A = 1, \dots, N\}$  und  $\{\Theta^A \mid A = 1, \dots, N\}$  von  $W$  und  $W^*$ , dann bilden die  $N \cdot n$  Vektoren  $E_A \otimes \eta^\alpha \in W \otimes V^*$  eine Basis von  $\text{Lin}(V, W)$ , so dass jedes Element  $L \in \text{Lin}(V, W)$  geschrieben werden kann als (Summenkonvention)

$$L = L^A_\alpha E_A \otimes \eta^\alpha. \quad (1.18)$$

Für die transponierte Abbildung gilt dann nach (1.16)

$$L^\top = (L^\top)_\alpha^A \eta^\alpha \otimes E_A = L^A_\alpha (E_A \otimes \eta^\alpha)^\top = L^A_\alpha \eta^\alpha \otimes E_A. \quad (1.19)$$



Bezüglich natürlich assoziierter Basen ist die Koeffizientenmatrix der transponierten Abbildung also das Transponierte der ursprünglichen Koeffizientenmatrix:  $(L^T)_a^A = L_a^A$ . Für die komplex-konjugierte Abbildung  $\bar{L}$  folgt

$$\bar{L} = (\bar{L})_a^A \bar{E}_A \otimes \bar{\eta}^a = \overline{L_a^A} j_W(E_A) \otimes (\eta^a \circ j_V^{-1}) = \overline{L_a^A} \bar{E}_A \otimes \bar{\eta}^a, \quad (1.20)$$

wobei  $\overline{L_a^A}$  die komplex-konjugierte Koeffizientenmatrix zu  $L_a^A$  ist, die deshalb entsteht, weil  $j_W$  eine antilineare Abbildung ist. Bezüglich der natürlich assoziierten Basen ist also die Koeffizientenmatrix der komplex-konjugierten Abbildung gerade das komplex-konjugierte der ursprünglichen Matrix:  $(\bar{L})_a^A = \overline{L_a^A}$ .

## 1.2 Innere Produkte

In der multilinearen Algebra verwendet man in Komponentenschreibweise oft Relationen der Form  $V_a = g_{ab} V^b$  (Index runterziehen) oder umgekehrt  $V^a = g^{ab} V_b$  (Index hochziehen), wobei  $g_{ab}$  die Komponenten einer „Metrik“ und  $g^{ab}$  die Komponenten der „inversen Metrik“ bezeichnen.

In diesem Abschnitt wollen wir klarstellen, welche koordinatenunabhängigen Operationen bzw. Abbildungen sich hinter diesen formalen Manipulationen verbergen. Um nicht immer an eine positiv-definite oder symmetrische Bilinearform zu denken, ersetzen wir das Symbol  $g$  für die „Metrik“ durch  $\omega$ , was unverfänglicher ist.

**Definition 18.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{F}$  (für uns reicht es aus an  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  zu denken). Eine *Bilinearform* auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{F}, \quad (1.21a)$$

so dass für alle  $u, v, w \in V$  und  $a, b \in \mathbb{F}$  gilt:

$$\omega(u + v, w) = \omega(u, w) + \omega(v, w), \quad \omega(au, v) = a \omega(u, v), \quad (1.21b)$$

$$\omega(u, v + w) = \omega(u, v) + \omega(u, w), \quad \omega(u, av) = a \omega(u, v). \quad (1.21c)$$

Die Form heißt *nicht ausgeartet* falls

$$\omega(u, v) = 0 \forall u \in V \Leftrightarrow v = 0. \quad \square \quad (1.21d)$$

**Bemerkung 19.** Gleichung (1.21d) ist äquivalent der transponierten Aussage, dass  $\omega(v, u) = 0 \forall u \in V \Leftrightarrow v = 0$ . Stichwort: „Spaltenrang gleich Zeilenrang“.  $\square$

**Bemerkung 20.** Die Form  $\omega$  heißt *symmetrisch* falls für alle  $u, v \in V$  gilt  $\omega(u, v) = \omega(v, u)$  und *antisymmetrisch* falls  $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ . Die in der Physik relevanten Bilinearformen sind meist nicht-ausgeartet und entweder symmetrisch oder antisymmetrisch. Um diese beiden Fälle effektiv gleichzeitig zu behandeln ist es günstig, die formale Entwicklung noch ein Stück weit ohne jede Symmetrieannahme weiterzutreiben. Weiter unten schränken wir uns dann auf den Fall ein, wo  $\omega$  entweder symmetrisch oder antisymmetrisch ist; vgl. Bemerkung 23. In jedem Fall setzen wir aber voraus, dass  $\omega$  nicht ausgeartet ist.  $\square$

Es besteht eine bijektive Zuordnung zwischen Bilinearformen auf  $V$  und linearen Abbildungen  $V \rightarrow V^*$  (Dualraum). Ist  $\omega$  die Bilinearform, so sei die ihr zugeordnete Abbildung mit  $\omega_{\perp}$  bezeichnet. Sie ist definiert durch

$$\omega_{\perp} : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \omega_{\perp}(v) := \omega(v, \cdot), \quad (1.22)$$

so dass also  $\omega_{\perp}(v)(w) = \omega(v, w)$ . Ist umgekehrt  $A : V \rightarrow V^*$  eine lineare Abbildung, so entspricht dieser die Bilinearform  $\bar{A}(v, w) := A(v)(w)$ .

**Bemerkung 21.** Da  $\omega$  nicht als symmetrisch vorausgesetzt wurde, existiert mit der alternativen Definition  $\omega_{\perp}(v) := \omega(\cdot, v)$  eine andere lineare Abbildung  $V \rightarrow V^*$ , deren Dimensionen von Kern und Bild mit denen der Abbildung (1.22) übereinstimmt. Da wir für das Folgende nur eine dieser Abbildungen benötigen, entscheiden wir uns o.B.d.A für (1.22). Die Abbildungen wären natürlich gleich, wenn wir es mit einer symmetrischen Form zu tun hätten und würden sich für antisymmetrische Formen nur durch das Vorzeichen unterscheiden.  $\square$

Nach Definition (1.21d) ist sofort klar, dass die Bilinearform  $\omega$  genau dann nicht ausgeartet ist wenn der Kern von  $\omega_{\perp}$  trivial (der Nullvektor) ist. In diesem Fall ist  $\omega_{\perp}$  injektiv und wegen der Endlichdimensionalität von  $\dim(V) = \dim(V^*)$  auch surjektiv, also ein Isomorphismus. (Für unendlich-dimensionale Vektorräume ist dies falsch.)

Wie angekündigt beschränken uns nun auf den Fall nicht ausgearteter Bilinearformen. Da  $\omega_{\perp}$  dann ein Isomorphismus ist, existiert eine lineare Abbildung  $\omega_{\uparrow} := \omega_{\perp}^{-1} : V^* \rightarrow V$  mit

$$\omega_{\uparrow} \circ \omega_{\perp} = \text{id}_V \quad \text{und} \quad \omega_{\perp} \circ \omega_{\uparrow} = \text{id}_{V^*}. \quad (1.23)$$

Mit Hilfe von  $\omega_{\uparrow}$  kann man nun die Bilinearform  $\omega$  zu einer Bilinearform  $\tilde{\omega}$  auf  $V^*$  zurückziehen; das bedeutet einfach die Bildung von

$$\tilde{\omega} := \omega \circ \omega_{\uparrow} \times \omega_{\uparrow} : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{F}. \quad (1.24a)$$

Also hat man

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\alpha, \beta) &:= \omega(\omega_{\uparrow}(\alpha), \omega_{\uparrow}(\beta)) \\ &= (\omega_{\perp} \circ \omega_{\uparrow}(\alpha)) \omega_{\uparrow}(\beta) \\ &= \alpha(\omega_{\uparrow}(\beta)). \end{aligned} \quad (1.24b)$$

Also gilt in Analogie zu (1.22), wenn man  $V$  und  $V^{**}$  aufgrund ihrer natürlichen Isomorphie (s.u.) identifiziert,

$$\omega_{\uparrow}(\beta) = \tilde{\omega}(\cdot, \beta). \quad (1.25)$$

Zur Erinnerung: Die erwähnte natürliche Isomorphie  $i : V \rightarrow V^{**}$  ist gegeben durch die für alle  $v \in V$  und alle  $\alpha \in V^*$  gültige Beziehung

$$i(v)(\alpha) := \alpha(v), \quad \forall v \in V, \forall \alpha \in V^*. \quad (1.26)$$

Also gilt insbesondere

$$i(\omega_{\uparrow}(\beta))(\alpha) = \alpha(\omega_{\uparrow}(\beta)). \quad (1.27)$$

**Bemerkung 22.** Man beachte, dass in (1.25) der *zweite* Eintrag der Bilinearform  $\tilde{\omega}$  verwendet wird, hingegen in (1.22) der *erste* Eintrag in der Bilinearform  $\omega$ . Hätte man, wie in Bemerkung 21 angedeutet, bei der Definition (1.22) von  $\omega_{\downarrow}$  den zweiten Eintrag verwendet, würde in (1.25) der erste Eintrag von  $\tilde{\omega}$  mit  $\beta$  gefüllt werden. Es ist also festzuhalten, dass bei Definition von  $\omega_{\uparrow}$  als dem Inversen von  $\omega_{\downarrow}$  diese Gegensätzlichkeit grundsätzlich besteht und nur bei *symmetrischen* Bilinearformen belanglos wird. Sie ist z.B. wichtig (und ihre Nicht-Beachtung führt oft zu Fehlern) im Falle von Weyl-Spinoren, die Elemente eines 2-dimensionalen komplexen Vektorraums mit nicht-ausgearteter *anti*-symmetrischer Bilinearform sind (Physiker letztere oft als „Spinormetrik“ an, Mathematiker sprechen korrekter von „symplektischer Struktur“).  $\square$

**Bemerkung 23.** Im folgenden schränken wir uns oft auf die beiden Fälle ein, in denen  $\omega$  entweder symmetrisch ( $\epsilon = 1$ ) oder antisymmetrisch ( $\epsilon = -1$ ) ist. Dann gilt für alle  $v, w \in V$

$$\omega(v, w) = \epsilon \omega(w, v), \quad \text{mit } \epsilon = 1 \text{ oder } \epsilon = -1. \quad (1.28)$$

Ist  $\omega$  weder symmetrisch noch antisymmetrisch, so kann es eindeutig als Summe seines symmetrischen und antisymmetrischen Teils zerlegt werden,

$$\omega = \omega^+ + \omega^-, \quad (1.29a)$$

wobei

$$\omega^{\pm}(v, w) := \frac{1}{2}(\omega(v, w) \pm \omega(w, v)). \quad (1.29b)$$

Später werden wir die  $\omega$ -erhaltenden linearen Abbildungen betrachten. Es ist klar, dass diese dann  $\omega^+$  und  $\omega^-$  getrennt erhalten müssen. Achtung: Ist  $\omega$  nicht entartet und nicht symmetrisch oder antisymmetrisch, dann kann  $\omega^+$  oder  $\omega_-$  oder beide durchaus entartet sein.  $\square$

**Proposition 24.** *Gilt (1.37), dann auch*

$$\omega_{\downarrow}^{\top} = \epsilon \omega_{\downarrow}, \quad \omega_{\uparrow}^{\top} = \epsilon \omega_{\uparrow}. \quad (1.30)$$

*Beweis.* Zuerst machen wir uns klar, dass die Aussagen (1.30) deshalb sinnvoll sind, weil Ausgangs- und Zielräume der Abbildungen  $\omega_{\downarrow}$  und  $\omega_{\uparrow}$  zueinander dual sind und wir  $V^{**}$  mit  $V$  durch (1.3) identifiziert haben. Also sind  $\omega_{\downarrow}$  und  $\omega_{\downarrow}^{\top}$  Abbildungen  $V \rightarrow V^*$  und  $\omega_{\uparrow}$  sowie  $\omega_{\uparrow}^{\top}$  Abbildungen  $V^* \rightarrow V$ . Dann beweisen wir die erste Gleichung in (1.30) wie folgt: Nach (1.14b) gilt  $\omega_{\downarrow}^{\top}(v)(w) = v((\omega_{\downarrow}(w)))$ , wobei hier auf der rechten Seite  $v$  als Element in  $V^{**}$  aufgefasst wird. Mit (1.3) ist die rechte Seite aber gleich  $\omega_{\downarrow}(w)(v) = \omega(w, v) = \epsilon \omega(v, w) = \epsilon \omega_{\downarrow}(v)(w)$ . Gleichheit der linken und rechten Seite für alle  $v, w \in V$  ergibt die erste Gleichung (1.30). Die zweite folgt völlig analog.  $\square$

### 1.3 Index Hoch- und Runterziehen

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun allgemein die bei Physikern so beliebte Operation des Hoch- und Runterziehens von Indizes verstehen. Dazu benutzen wir die Komponenten von Vektoren und Dualvektoren bezüglich zueinander dualer Basen.

Sei  $n = \dim(V)$  und  $\{e_a \mid a = 1, \dots, n\}$  Basis von  $V$  mit zugehöriger Dualbasis  $\{\eta^a \mid a = 1, \dots, n\}$  von  $V^*$ , d.h.  $\eta^a(e_b) = \delta_b^a$ . Dann gilt für jedes  $\alpha \in V^*$ , dass  $\alpha = \alpha(e_b)\eta^b$ , wie man sofort an der Gleichheit der Auswertungen beider Seiten auf der Basis  $e_a$  zeigt. Also gilt mit

$$\omega_{ab} := \omega(e_a, e_b) \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}^{ab} := \tilde{\omega}(\eta^a, \eta^b) \quad (1.31)$$

auch

$$\omega_{\downarrow}(e_a) = \omega(e_a, e_b)\eta^b = \omega_{ab}\eta^b, \quad (1.32a)$$

$$\omega_{\uparrow}(\eta^a) = \tilde{\omega}(\eta^b, \eta^a)e_b = \tilde{\omega}^{ba}e_b. \quad (1.32b)$$

Man beachte, dass auf der rechten Seite von (1.32a) über den zweiten Index an  $\omega$  summiert wird, während auf der rechten Seite von (1.32b) die Summation über den ersten Index von  $\tilde{\omega}$  läuft. Dies ist eine direkte Folge von Bemerkung 22.

Aus (1.32) ergibt sich nun sofort der Zusammenhang zwischen den Komponenten  $\omega_{ab}$  und  $\tilde{\omega}^{ab}$  wie folgt:

$$e_a = \omega_{\uparrow} \circ \omega_{\downarrow}(e_a) = \omega_{ab}\omega_{\uparrow}(\eta^b) = \omega_{ab}\tilde{\omega}^{cb}e_c, \quad (1.33)$$

was gleichbedeutend mit der Aussage ist, dass die Matrizen  $\{\omega_{ab}\}$  und  $\{\tilde{\omega}^{ab}\}$  zueinander *transponiert invers* sind. Auch das (die Transposition) ist eine direkte Folge von Bemerkung 22.

Auf Ebene der Komponenten sind nun die Abbildungen  $\omega_{\downarrow}$  und  $\omega_{\uparrow}$  wie folgt: Sei  $v = v^a e_a \in V$  und  $\alpha = \alpha_a \eta^a \in V^*$ , dann gilt

$$\omega_{\downarrow}(v) = v^a \omega_{ab} \eta^b = v_b \eta^b, \quad \text{mit} \quad v_b := v^a \omega_{ab}, \quad (1.34a)$$

$$\omega_{\uparrow}(\alpha) = \alpha_a \tilde{\omega}^{ba} e_b = \alpha^b e_b, \quad \text{mit} \quad \alpha^b := \tilde{\omega}^{ba} \alpha_a. \quad (1.34b)$$

**Bemerkung 25.** Auf Ebene der Komponenten entsprechen die Abbildungen  $\omega_{\downarrow}$  und  $\omega_{\uparrow}$  den Operationen des Index Runter- und Hochziehens. Dabei sind  $v_b = v^a \omega_{ab}$  die Komponenten des Bildes in  $V^*$  von  $v = v^a e_a \in V$  unter der Abbildung  $\omega_{\downarrow}$  bezüglich der zu  $\{e_a\}$  dualen Basis  $\{\eta^a\}$ . Analog sind  $\alpha^b = \tilde{\omega}^{ba} \alpha_a$  die Komponenten des Bildes in  $V$  von  $\alpha = \alpha_a \eta^a \in V^*$  unter der Abbildung  $\omega_{\uparrow}$  bezüglich der zu  $\{\eta^a\}$  dualen Basis  $\{e_a\}$  von  $V$ . Ist aus dem Kontext klar, auf welche Bilinearform man sich bezieht, so schreibt man auch  $v^b$  statt  $\omega_{\downarrow}(v)$  und  $\alpha^{\sharp}$  statt  $\omega_{\uparrow}(\alpha)$  (engl. „musical isomorphisms“), bleibt aber bei den Komponenten bei obiger Schreibweise, schreibt also nicht etwa  $v_a^b$  sondern einfach  $v_a$ .

Diese zueinander inversen Isomorphismen  $\omega_{\downarrow} : V \rightarrow V^*$  und  $\omega_{\uparrow} : V^* \rightarrow V$  kann man nun auf beliebige Tensorprodukte  $T_m^{\ell} V := V^{\otimes \ell} \otimes V^{*\otimes m}$  erweitern und dadurch beispielsweise das „Runterziehen des ersten Index“ durch die Abbildung  $\omega_{\downarrow} \otimes \text{id}_V \otimes \dots \otimes \text{id}_{V^*}$  definieren. Analog geht dies für mehrere Indizes an beliebigen Stellen, wobei die Indexbewegung an einer Stelle mit der an einer anderen klarerweise vertauscht, so dass eine Reihenfolge nicht angegeben werden muss.

Insbesondere ist es natürlich möglich, die Indizes an der Bilinearform  $\omega \in V^* \otimes V^*$  selbst hochzuziehen, also  $\omega_\uparrow \otimes \omega_\uparrow$  auf sie anzuwenden, so dass ein Element in  $V \otimes V$  entsteht, was man wegen der natürlichen Identifikation von  $V^{**}$  mit  $V$  als Bilinearform auf  $V^*$  auffassen darf. Diese ist dann aber gerade  $\tilde{\omega}$ , wie man aus (1.24b) und (1.27) sieht. Auf der Ebene der Komponenten sieht man dies so:

$$\omega^{ab} := \tilde{\omega}^{ac} \underbrace{\tilde{\omega}^{bd} \omega_{cd}}_{\delta_c^b} = \tilde{\omega}^{ab}. \quad (1.35)$$

**Bemerkung 26.** Wegen (1.35) ist es erlaubt  $\tilde{\omega}^{ab}$  durchweg durch  $\omega^{ab}$  (definiert durch Index-Hochziehen an  $\omega_{ab}$ ) zu ersetzen, was wir im Folgenden auch tun werden. Gleichungen (1.34) sind dann mit  $\omega^{ab}$  statt  $\tilde{\omega}^{ab}$  hinzuschreiben. Das ist dann die in der Physik häufig gebrauchte Form. Erneut weisen wir darauf hin, dass das Runterziehen mit dem ersten Index an  $\omega_{ab}$  und das Raufziehen mit dem zweiten Index an  $\omega^{ab}$  erfolgen muss, wobei die von den Komponenten  $\omega^{ab}$  und  $\omega_{ab}$  gebildeten Matrixen zueinander *transponiert-invers* sind. An dieser Stelle könnte man denken, dass es einfacher wäre, Indizes mit der zu  $\omega_{ab}$  inversen (statt *transponiert-inversen*) hochzuziehen. Sei diese  $\hat{\omega}^{ab}$ , d.h.,  $\hat{\omega}^{ac} \omega_{cb} = \delta_b^a$ . Dann bekäme man statt (1.35) aber  $\omega^{ab} = \hat{\omega}^{ac} \hat{\omega}^{bd} \omega_{cd} = \hat{\omega}^{ba}$ , d.h. das Hochziehen der Indizes an  $\omega_{ab}$  resultiert nicht in  $\hat{\omega}^{ab}$ , sondern ihrer Transponierten. Das muss man aber vermeiden, wenn man nicht zwischen *der Bilinearform mit hochgezogenen Indizes* ( $\omega^{ab}$ ) und *der zum Hochziehen der Indizes benutzten Bilinearform* ( $\hat{\omega}^{ab}$ ) unterscheiden will.  $\square$

## 1.4 Adjungierte Abbildungen

Eine nicht-ausgeartete Bilinearform definiert einen Begriff von Adjunktion. Erst durch diesen, also relativ zur gewählten Form, sind dann auch selbstadjungierte Abbildungen definiert.

**Definition 27.** Sei  $A : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung und  $\omega$  eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf  $V$ . Die  $\omega$ -adjungierte Abbildung zu  $V$  ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $A^\dagger : V \rightarrow V$ , die für alle  $u, v \in V$  folgende Gleichung erfüllt:

$$\omega(u, Av) = \omega(A^\dagger u, v). \quad \square \quad (1.36)$$

**Bemerkung 28.** Ist  $\omega$  entweder symmetrisch ( $\epsilon = 1$ ) oder antisymmetrisch ( $\epsilon = -1$ ), d.h. gilt für alle  $v, w \in V$

$$\omega(v, w) = \epsilon \omega(w, v), \quad \text{mit } \epsilon = 1 \text{ oder } \epsilon = -1, \quad (1.37)$$

dann ist die lineare Abbildung

$$\mathcal{C} : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V), \quad X \mapsto \mathcal{C}(X) := X^\dagger \quad (1.38a)$$

eine Involution, d.h.

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{C} = \text{id}_{\text{End}(V)}. \quad (1.38b)$$

Das folgt sofort aus  $\omega(v, Xw) = \omega(X^\dagger v, w) = \epsilon \omega(w, X^\dagger v) = \epsilon \omega(X^{\dagger\dagger} w, v) = \epsilon^2 \omega(v, X^{\dagger\dagger} w)$ .  $\square$

**Bemerkung 29.** Gilt (1.37) so hat die Abbildung  $\mathcal{C}$  aus (1.38) die Eigenwerte  $\pm 1$ . Es gibt also die unter Adjunktion symmetrischen und antisymmetrischen Abbildungen

$$\text{End}^\pm(V) := \{X \in \text{End}(V) \mid \mathcal{C}(X) = \pm X\} \subset \text{End}(V), \quad (1.39)$$

wobei

$$\text{End}(V) = \text{End}^+(V) \oplus \text{End}^-(V). \quad (1.40)$$

Die zugehörigen linearen Projektionsabbildungen sind

$$\begin{aligned} P^\pm &: \text{End}(V) \rightarrow \text{End}^\pm(V), \\ P^\pm &:= \frac{1}{2}(\text{id}_{\text{End}(V)} \pm \mathcal{C}). \end{aligned} \quad (1.41a)$$

Die Involutivität (1.38b) von  $\mathcal{C}$  ergibt dann sofort

$$P^+ \circ P^+ = P^+, \quad P^- \circ P^- = P^-, \quad P^+ \circ P^- = P^- \circ P^+ = 0, \quad (1.41b)$$

was nachträglich zeigt, dass  $\text{End}(V)$  in der Tat eine direkte Summe ist, wie in (1.40) konstatiert.  $\square$

**Proposition 30.** Die adjungierte Abbildung kann durch die transponierte Abbildung und die Abbildungen  $\omega_\top$  und  $\omega_\perp$  ausgedrückt werden. Mit den linearen Abbildungen  $\mathcal{C} : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$  (wie oben) und  $\mathcal{T} : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V^*)$ ,  $A \mapsto \mathcal{T}(A) := A^\top$  (letztere definiert in (1.14b), hier angewandt auf  $W = V$ ) ist

$$\mathcal{C} = \text{Ad}_{\omega_\top} \circ \mathcal{T}, \quad (1.42a)$$

wobei  $\text{Ad}_{\omega_\top} : \text{End}(V^*) \rightarrow \text{End}(V)$  die lineare Abbildung  $A^* \rightarrow \omega_\top \circ A^* \circ \omega_\top^{-1} = \omega_\top \circ A^* \circ \omega_\perp$  bezeichnet. Das ist gleichbedeutend damit, dass für jedes  $A \in \text{End}(V)$  gilt

$$A^\dagger = \omega_\top \circ A^\top \circ \omega_\perp. \quad (1.42b)$$

*Beweis.* Anwenden von (1.22) und (1.14b) auf die linke Seite von (1.36) ergibt  $\omega(v, Aw) = \omega_\perp(v)(Aw) = (A^\top \circ \omega_\perp)(v)(w)$ . Anwenden von (1.22) auf die rechte Seite von (1.36) ergibt  $\omega(A^\dagger v, w) = (\omega_\perp \circ A^\dagger)(v)(w)$ . Gleichheit beider Seiten für alle  $v, w \in V$  zeigt (1.42b) und damit auch (1.42a). Für diesen Beweis war die Annahme (1.37) nicht nötig. Die Formeln (1.42) gelten unabhängig davon, sind also, falls (1.42) gilt, unabhängig vom Wert von  $\epsilon$ .  $\square$

**Proposition 31.** Es gelte wieder (1.37). Wir identifizieren  $\text{End}(V)$  mit  $V \otimes V^*$  und betrachten eine Abbildung  $X \in \text{End}(V)$  vom Rang 1. Es gilt also  $X = \alpha \otimes \beta$  mit  $\alpha \in V$  und  $\beta \in V^*$ , so dass  $X(v) = \beta(v) \alpha$ . Dann gilt

$$\mathcal{C}(\alpha \otimes \beta) = (\alpha \otimes \beta)^\dagger = \epsilon \omega_\top(\beta) \otimes \omega_\perp(\alpha). \quad (1.43)$$

*Beweis.* Wir geben gleich zwei Beweise. Ein erster, direkter, starte von der Definition (1.36), gemäß der  $\omega(v, \alpha \otimes \beta(w)) = \omega((\alpha \otimes \beta)^\dagger(v), w)$ . Die linke Seite ist gleich  $\omega(v, \alpha) \beta(w) = \epsilon \omega(\alpha, v) \beta(w)$ , die rechte hingegen gleich  $\omega((\alpha \otimes \beta)^\dagger(v), w) =$

$[\omega_{\perp} \circ (\alpha \otimes \beta)^{\dagger}](w)$ . Da diese Gleichheit für alle  $w \in V$  gilt folgt  $\epsilon \omega(\alpha, \nu) \beta = \omega_{\perp} \circ (\alpha \otimes \beta)^{\dagger}(\nu)$ , was äquivalent ist zu  $(\alpha \otimes \beta)^{\dagger}(\nu) = \epsilon \omega(\alpha, \nu) \omega_{\uparrow}(\beta) = \epsilon \omega_{\uparrow}(\beta) \otimes \omega_{\perp}(\alpha)(\nu)$ . Da dies für alle  $\nu \in V$  gelten muss folgt (1.43). Ein alternativer Beweis auf Grundlage bereits erhaltener Resultate ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
(\alpha \otimes \beta)^{\dagger} &= \omega_{\uparrow} \circ (\alpha \otimes \beta)^{\top} \circ \omega_{\perp} \\
&= \omega_{\uparrow} \circ (\beta \otimes \alpha) \circ \omega_{\perp} \\
&= \omega_{\uparrow}(\beta) \otimes (\alpha \circ \omega_{\perp}) \\
&= \omega_{\uparrow}(\beta) \otimes \omega_{\perp}^{\top}(\alpha) \\
&= \epsilon \omega_{\uparrow}(\beta) \otimes \omega_{\perp}(\alpha).
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Dabei haben wir (1.42b) am ersten, (1.16) am zweiten und (1.30) am letzten Gleichheitszeichen verwendet.  $\square$

Bezüglich der dualen Basen  $\{e_a\}$  und  $\{\eta^a\}$  von  $V$  und  $V^*$  ist  $A = A_b^a e_a \otimes \eta^b$  (so dass  $A e_b = A_b^a e_a$ ) und  $A^{\top} = (A^{\top})_b^a \eta^b \otimes e_a$  (so dass  $A^{\top} \eta^a = (A^{\top})_b^a \eta^b$ ). Definition (1.14b) besagt  $A^{\top} \eta^a = \eta^a \circ A$  und ergibt sofort

$$(A^{\top})_b^a = A_b^a. \tag{1.45}$$

Weiter ist in Komponenten  $A^{\dagger} e_b = A_b^a e_a$ , so dass wegen (1.32) die Komponentenform von (1.42b) gegeben ist durch (beachte Bemerkung 26)

$$A_b^{\dagger a} = \omega^{ad} \omega_{bc} A_d^c. \tag{1.46}$$

**Bemerkung 32.** Beachte, dass dies i.a. *nicht* besagt, dass die Komponenten  $A_b^{\dagger a}$  aus den Komponenten  $A_d^c$  entstehen indem man den unteren Index nach oben und den oberen Index nach unten zieht. Dafür müsste gemäß (1.34) auf der rechten Seite  $\omega^{ad} \omega_{cd} A_d^c$  stehen, also die Indizes an  $\omega_{cd}$  in umgekehrter Reihenfolge. Für symmetrisches ( $\epsilon = 1$ )  $\omega$  ist diese Aussage freilich richtig. Für antisymmetrisches ( $\epsilon = -1$ )  $\omega$  unterscheiden sich  $A_b^{\dagger a}$  und das Indexverschobene  $A_d^c$  gerade um ein Vorzeichen. Das ist eben genau Formel (1.42b) in Komponenten, so dass es für symmetrische oder antisymmetrische  $\omega$  besser wäre statt (1.46) zu schreiben:

$$A_b^{\dagger a} = \epsilon \omega^{ad} A_d^c \omega_{cb}. \quad \square \tag{1.47}$$

**Bemerkung 33.** Setz man keine Symmetrie oder Antisymmetrie von  $\omega$  voraus, dann existiert neben (1.36) eine weitere Definition der adjungierten Abbildung, die durch  $\omega(Au, \nu) = \omega(u, A^{\ddagger} \nu)$  gegeben ist. Analog zu (1.42b) erhält man dann  $A^{\ddagger} = (\omega_{\uparrow})^{\top} \circ A^{\top} \circ (\omega_{\perp})^{\top}$ . Die Abbildungen  $\dagger$  und  $\ddagger$  sind zueinander invers. Ist  $\omega$  aber symmetrisch ( $\epsilon = 1$ ) oder antisymmetrisch ( $\epsilon = -1$ ), dann sind sie gleich, denn  $\omega(AX, Y) = \epsilon \omega(Y, AX) = \epsilon \omega(A^{\dagger} Y, X) = \omega(X, A^{\dagger} Y)$ . In diesen Fällen ist also  $\dagger$  eine lineare Involution auf dem Raum der linearen Selbstabbildungen von  $V$ , wie ja bereits in Bemerkung 28 festgestellt wurde.  $\square$

## Kapitel 2

# Symmetrien innerer Produkte

### 2.1 Lie Algebren allgemein

Im Folgenden ist  $V$  wieder ein Vektorraum über  $\mathbb{F}$  ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ). Der  $\mathbb{F}$ -Vektorraum  $\text{End}(V)$  ist wie zu Beginn bereits diskutiert eine assoziative Algebra deren Multiplikation die Komposition ist. Damit ist es aber auch eine Lie-Algebra.

**Definition 34.** Eine Lie-Algebra  $L$  über  $\mathbb{F}$  der Dimension  $n$  ist ein Paar  $L := (V, [\cdot, \cdot])$ . Dabei ist  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{F}$  und  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ ,  $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ , eine Abbildung, genannt *Lie-Klammer* oder *Lie-Produkt*, die folgende Eigenschaften erfüllt. Für alle  $X, Y, Z \in V$  und alle  $\alpha \in \mathbb{F}$  gilt:

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (\text{Antisymmetrie}), \quad (2.1a)$$

$$[X, Y + \alpha Z] = [X, Y] + \alpha[X, Z] \quad (\text{Bilinearität}), \quad (2.1b)$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität}). \quad (2.1c)$$

Man beachte, dass die Jacobi-Identität im gewissen Sinne als Ersatz für die i.A. fehlende Assoziativität genommen werden kann:  $[X, [Y, Z]] \neq [[X, Y], Z]$ .

**Bemerkung 35.** Jede assoziative Algebra wird zu einer Lie-Algebra, wenn man das Lie-Produkt als Kommutator definiert:  $[X, Y] := X \cdot Y - Y \cdot X$ . Dabei ist mit einem Punkt das assoziative Produkt bezeichnet. Antisymmetrie und Bilinearität sind trivial erfüllt, während die Jacobi-Identität eine leicht zu verifizierende Folge der Assoziativität ist. Insbesondere ist also die assoziative Algebra  $\text{End}(V)$  auch Lie-Algebra, wenn wir für  $X, Y \in \text{End}(V)$  definieren

$$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X. \quad (2.2)$$

Es wird im Folgenden immer aus dem Kontext ersichtlich sein, ob mit dem Symbol  $\text{End}(V)$  nur der Vektorraum, die assoziative Algebra, oder die Lie-Algebra gemeint ist; meist ist es Letzteres.



## 2.2 Lie-Gruppen und -Algebren, die symmetrische oder antisymmetrische innere Produkte invariant lassen

**Definition 36.** Sei  $V$  endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{F}$  und  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  eine nicht ausgeartete symmetrische ( $\epsilon = 1$ ) oder antisymmetrische ( $\epsilon = -1$ ) Bilinearform; d.h.  $\omega(v, w) = \epsilon \omega(w, v)$ . Dann ist die *Orthogonale Gruppe*  $O(V, \omega)$  von  $V$  bezüglich  $\omega$  die Menge derjenigen Abbildungen in  $GL(V)$ , die  $\omega$  invariant lassen. Da  $\omega(Av, Aw) = \omega(v, w) \forall v, w \in V \Leftrightarrow A^\dagger = A^{-1}$ , ist

$$O(V, \omega) := \{A \in GL(V) \mid A^\dagger = A^{-1}\}. \quad (2.3)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Untergruppen von  $GL(V)$  bilden. Die zugehörige Lie-Algebra besteht aus allen Endomorphismen  $X$  von  $V$  für die  $X^\dagger = -X$ , also mit (1.41)

$$\mathfrak{o}(V, \omega) := \{X \in \text{End}(V) \mid P_+(X) = 0\} = \text{Kern}(P_+). \quad (2.4a)$$

Da  $\text{Kern}(P_+) = \text{Bild}(P_-)$  können wir auch schreiben

$$\mathfrak{o}(V, \omega) := P_-(\text{End}(V)) = \text{Bild}(P_-). \quad (2.4b)$$

Wir erinnern an dieser Stelle an den Zusammenhang (1.42), aus dem die Abhängigkeit der Abbildung  $\mathcal{C}(X) := X^\dagger$  von  $\omega$  hervorgeht.  $\square$

## 2.3 Basen der Lie-Algebren und die Lie-Produkte ihrer Elemente

Seien  $\{e_\alpha \mid \alpha = 1, \dots, n\}$  und  $\{\eta^\alpha \mid \alpha = 1, \dots, n\}$  duale Basen von  $V$  bzw.  $V^*$ . Identifiziert man  $\text{End}(V)$  mit  $V \otimes V^*$ , dann ist eine Basis von  $\text{End}(V)$  gegeben durch die  $n^2$  Elemente

$$B_b^a := e_b \otimes \eta^a \in \text{End}(V). \quad (2.5)$$

Für diese gilt offensichtlich

$$[B_b^a, B_d^c] = \delta_d^a B_b^c - \delta_b^c M_d^a. \quad (2.6)$$

Die transponierten Basiselemente folgen aus der Definitionsgleichung (1.14b) sofort zu

$$(B_b^a)^\top = (e_b \otimes \eta^a)^\top = \eta^a \otimes e_b. \quad (2.7)$$

Damit und mit (1.42) folgen die adjungierten Basiselemente so:

$$\begin{aligned} (B_b^a)^\dagger &= \omega_\top \circ (B_b^a)^\top \circ \omega_\perp \\ &= \omega_\top \circ \eta^a \otimes e_b \circ \omega_\perp \\ &= \omega_\top(\eta^a) \otimes \omega_\perp^\top(e_b) \\ &= \epsilon \omega_\top(\eta^a) \otimes \omega_\perp(e_b), \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei wir im letzten Schritt (1.30) benutzt haben.

Wir definieren

$$\eta_a := \omega_\perp(e_a) = \omega_{ab}\eta^b, \quad (2.9a)$$

$$e^a := \omega_\top(\eta^a) = \omega^{ba}e_b, \quad (2.9b)$$

wobei wir (1.32) benutzt haben mit  $\tilde{\omega}^{ab} = \omega^{ab}$ . Es gilt dann offensichtlich

$$\eta_a(e_b) = \omega_{ab}, \quad (2.10a)$$

$$\eta^a(e^b) = \omega^{ab}. \quad (2.10b)$$

Damit können wir (2.8) schreiben als

$$(B_b^a)^\dagger = \epsilon e^a \otimes \eta_b. \quad (2.11)$$

Mit Hilfe der Basis (2.5) und der Beziehung (2.11) können wir nun leicht eine Basis der Lie-Algebra  $\mathfrak{o}(V, \omega)$  angeben. Wir erhalten Sie als maximale, linear unabhängige Teilmenge im Bild der Basis  $\{B_b^a \mid 1 \leq a, b \leq n\}$  unter der Projektionsabbildung  $P_-$ . Es ist (der Faktor  $-2\epsilon$  ist konventionell und dient nur der späteren Bequemlichkeit):

$$M_b^a := -2\epsilon P_-(B_b^a) = e^a \otimes \eta_b - \epsilon e_b \otimes \eta^a. \quad (2.12a)$$

Der darin enthaltene maximale Satz linear unabhängiger Elemente wird noch überschaubarer, wenn wir die Linearkombinationen

$$M_{ab} := \omega_{ac} M_b^c = e_a \otimes \eta_b - \epsilon e_b \otimes \eta_a. \quad (2.12b)$$

betrachten, denn dann ist offensichtlich

$$M_{ab} = -\epsilon M_{ba}. \quad (2.12c)$$

Beachte, dass die Transformation  $M_b^a \mapsto M_{ab} := \omega_{ac} M_b^c$  natürlich invertierbar ist:  $M_{ab} \mapsto M_b^a := \omega^{ca} M_{cb}$ . Unter den  $M_{ab}$  sind aber genau die  $\frac{1}{2}n(n - \epsilon)$  Vektoren  $M_{ab}$  mit  $a < b$  (für  $\epsilon = 1$ ) bzw.  $a \leq b$  (für  $\epsilon = -1$ ) linear unabhängig. Also ist

$$\mathfrak{o}(V, \omega) = \begin{cases} \text{Span}\{M_{ab} \mid 1 \leq a < b \leq n\} & \text{für } \epsilon = 1 \\ \text{Span}\{M_{ab} \mid 1 \leq a \leq b \leq n\} & \text{für } \epsilon = -1, \end{cases} \quad (2.13a)$$

mit

$$\dim(\mathfrak{o}(V, \omega)) = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n - 1) & \text{für } \epsilon = 1 \\ \frac{1}{2}n(n + 1) & \text{für } \epsilon = -1. \end{cases} \quad (2.13b)$$

In der Basis (2.13a) kann nun mit Hilfe der expliziten Ausdrücke (2.12b) und den Relationen (2.10a) die Lie-Klammern der Basiselemente leicht ausgerechnet werden. Das Resultat ist:

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \omega_{ad}M_{bc} + \omega_{bc}M_{ad} - \epsilon\omega_{ac}M_{bd} - \epsilon\omega_{bd}M_{ac} \quad (2.14a)$$

$$= \omega_{ad}M_{bc} + \omega_{bc}M_{ad} - \omega_{ca}M_{bd} - \omega_{db}M_{ac}. \quad (2.14b)$$

Dabei haben wir beim Übergang von (2.14a) nach (2.14b) lediglich die Symmetrie/Antisymmetrie von  $\omega$  ausgenutzt, d.h.,  $\epsilon\omega_{ac} = \omega_{ca}$  etc.

## Kapitel 3

# Die Exponentialabbildung

**Definition 37.** Man nennt

$$\begin{aligned} \exp : \text{End}(V) &\rightarrow \text{GL}(V) \\ X &\mapsto \exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die *Exponentialabbildung* auf  $\text{End}(V)$ .  $\square$

**Bemerkung 38.** Der Definitionsbereich von  $\exp$  ist ganz  $\text{End}(V)$ , da die Exponentialreihe in irgendeiner der Standardnormen auf  $\text{End}(V)$  absolut konvergiert. Das Bild von  $\exp$  liegt in der Tat in der Untermenge  $\text{GL}(V) \subset \text{End}(V)$ , wie wir gleich sehen werden.  $\square$

Ist  $X \in \text{End}(V)$  und  $A \in \text{GL}(V)$ , und sei  $\text{Ad}_A : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$  die Abbildung

$$\text{Ad}_A(X) := A \circ X \circ A^{-1}. \quad (3.2)$$

Dann gilt klarerweise  $\text{Ad}_A(X^n) = (\text{Ad}_A(X))^n$  und damit auch, für alle  $A$  in  $\text{GL}(V)$ ,

$$\text{Ad}_A \circ \exp = \exp \circ \text{Ad}_A. \quad (3.3)$$

Determinante und Spur sind die bekannten  $\mathbb{F}$ -wertige Funktionen auf  $\text{End}(V)$ , die wir mit ‘det’ und ‘spur’ bezeichnen. Für sie gilt

**Proposition 39.**

$$\det \circ \exp = \exp \circ \text{spur}. \quad (3.4)$$

*Beweis.* Sei  $X \in \text{End}(V)$ ; ist  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , so betrachte man den komplexifizierten Vektorraum  $V_{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C}$  mit seiner kanonisch-complexen Struktur und setzt  $X$   $\mathbb{C}$ -linear fort. Über  $\mathbb{C}$  existiert dann eine Basis  $\{e_{\alpha} \mid \alpha = 1, \dots, n\}$  von  $V_{\mathbb{C}}$  bzw.  $V$  (falls es schon

komplex war) aus Eigenvektoren von  $X$ . In Matrixsprechweise ist dies äquivalent der Aussage, dass  $X$  triangularisierbar ist. Diese sind auch die Eigenvektoren der Abbildung  $\exp(X)$  zu den exponentierten Eigenwerten. Nun ist die Spur einer Abbildung die Summe, die Determinante das Produkt der Eigenwerte. Natürlich gilt, dass das Produkt der exponentierten Eigenwerte von  $X$  gleich ist ihrer exponentierten Summe. Das besagt aber gerade (3.4).  $\square$

Wir definieren die Untergruppe  $GL^+(V) \subset GL(V)$  (vgl. (1.2)) vom Index 2 durch

$$GL^+(V) := \{A \in \text{End}(V) \mid \det(A) > 0\}. \quad (3.5)$$

Dann impliziert (3.4), dass das Bild von  $\exp$  in  $GL^+(V)$  enthalten ist.

Ist  $\omega$  eine nicht ausgeartete Bilinearform auf  $V$  und  $G \subset GL(V)$  die Lie-Gruppe der  $\omega$ -erhaltenden Abbildungen, so ergibt sich eine Vielzahl von wichtigen Spezialfällen, die wir bereits diskutiert haben. Wir wiederholen nochmals die Charakterisierung (2.3) der zugehörigen Gruppe

$$A \in O(V, \omega) \Leftrightarrow \omega_{\perp} \circ A \circ \omega_{\top} = (A^{\top})^{-1} \quad (3.6)$$

und ihrer Lie-Algebra (2.4),

$$X \in \mathfrak{o}(V, \omega) \Leftrightarrow \omega_{\perp} \circ X \circ \omega_{\top} = -X^{\top}. \quad (3.7)$$

Daraus sieht man sofort, dass  $\exp(X) \in G$  falls  $X \in \mathfrak{g}$ , denn  $\omega_{\perp} \circ \exp(X) \circ \omega_{\top} = \exp(\omega_{\perp} \circ X \circ \omega_{\top})$ , da  $\omega_{\top} = (\omega_{\perp})^{-1}$ .

### 3.1 Einparametrische Untergruppen

Wir haben gerade gesehen, dass für jedes  $X \in \mathfrak{g}$  die Kurve  $\gamma(t) := \exp(tX)$  in  $G$  verläuft und die Gruppenidentität  $\gamma(0) = \exp(0) = e$  mit  $\mathfrak{g} = \exp(X)$  verbindet. Die Abbildung

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G, \quad t \mapsto \exp(tX) \quad (3.8)$$

ist ein Homomorphismus der Abelschen Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$  in die Gruppe  $(G, \circ)$ ; d.h es gilt

$$\gamma(0) = e \quad \text{wobei } e = \text{Identität in } G, \quad (3.9a)$$

$$\gamma(t+s) = \gamma(t) \circ \gamma(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (3.9b)$$

Allgemein nennt man eine Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  die (3.9a-3.9b) genügt eine *einparameter Untergruppe* von  $G$ .

**Proposition 40.** *Jede einparameter Untergruppe  $\gamma$  ist von der Form  $\gamma(t) = \exp(tX)$ , wobei  $\dot{\gamma} = X \in \text{End}(V)$ . (Wir setzen  $\dot{\gamma}(t)$  die Ableitung der Funktion  $\gamma$  an der Stelle  $t$  und  $\dot{\gamma} := \dot{\gamma}(0)$ .)*

*Beweis.* Sei  $\beta(t) := \gamma(X) \circ \exp(-tX)$ , dann ist  $\dot{\beta}(t) = \dot{\gamma}(t) \circ \exp(-tX) - \gamma(t) \circ X \circ \exp(-tX)$ . Differenziert man  $\gamma(t+s) = \gamma(t) \circ \gamma(s)$  nach  $s$  bei  $s=0$ , so folgt  $\dot{\gamma}(t) = \gamma(t) \circ X$ . Dies zeigt  $\dot{\beta}(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ ; also ist  $\beta(t) = \beta(t=0) = e$ .  $\square$

## 3.2 Identifikation mit Matrixgruppen

Oft ist es günstig  $V$  mit  $\mathbb{F}^n$  und  $\text{End}(V)$  mit  $\text{End}(\mathbb{F}^n) = \text{Mat}(n, \mathbb{F})$ , der Algebra der  $n \times n$ -Matrizen, zu identifizieren. Dazu einige Bemerkungen: Eine Basis  $B := \{e_\alpha \mid \alpha = 1, \dots, n\}$  von  $V$  kann als Isomorphismus  $B : V \rightarrow \mathbb{F}^n$  aufgefasst werden, der wir folgend charakterisiert ist: Sei  $v = v^\alpha e_\alpha$ , dann  $B(v) := (v^1, \dots, v^n)$ , d.h.  $B$  ordnet jedem Vektor seine Komponenten bezüglich sich selbst (der Basis) zu. Dieser Isomorphismus induziert einen Algebren-Isomorphismus wie folgt:

$$M_B : \text{End}(V) \rightarrow \text{Mat}(n, \mathbb{F}), \quad A \mapsto M_B(A) := B \circ A \circ B^{-1}. \quad (3.10)$$

Somit können wir *nach Wahl von*  $B$  die Vektorräume  $V$  und  $\mathbb{F}^n$  und die Algebren  $\text{End}(V)$  und  $\text{Mat}(n, \mathbb{F})$  identifizieren. Da kein  $B$  in der Menge aller Basen von sich aus ausgezeichnet ist, ist auch keine der zugehörigen Identifikationen  $V \leftrightarrow \mathbb{F}^n$  bzw.  $\text{End}(V) \leftrightarrow \text{Mat}(n, \mathbb{F})$  ausgezeichnet.

Wir betrachten also zunächst die Abbildung

$$\exp : \text{Mat}(n, \mathbb{F}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{F}). \quad (3.11)$$

$\text{GL}(n, \mathbb{F})$  ist eine offene Untermenge von  $\text{Mat}(n, \mathbb{F})$ , denn sie ist Urbild der offenen Menge  $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$  bezüglich der stetigen Determinantenfunktion, d.h.  $\text{GL}(n, \mathbb{F}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ .

## 3.3 Injektivität und Surjektivität

Im Allgemeinen ist  $\exp$  weder injektiv noch surjektiv. Ein einfaches Beispiel für fehlende Injektivität ist  $G = U(1)$ , parametrisiert durch die komplexen Zahlen  $z$  mit  $|z| = 1$ , und  $(g) = i\mathbb{R}$  (imaginären Zahlen), so ist  $\exp^{-1}(1) = \{in2\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Dies lässt sich auf alle höherdimensionalen Drehgruppen verallgemeinern. Allgemein kann  $\exp$  nicht injektiv sein wenn  $G$  kompakt ist ( $\mathfrak{g}$  ist als Vektorraum nie kompakt.)

Für fehlende Surjektivität führen wir folgendes, für die SRT relevantes Beispiel an. Wir betrachte die Gruppe

$$\text{SL}(2, \mathbb{C}) := \{A \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}, \quad (3.12)$$

und darin Matrizen der Form

$$A_a = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C} - \{0\}. \quad (3.13)$$

Beachte, dass alle diese Elemente durch eine stetige Kurve mit der Identität verbunden werden können, denn  $SL(2, \mathbb{C})$  ist zusammenhängend. (Für lokal wegezusammenhängende topologische Räume sind 'Zusammenhang' und 'Wegezusammenhang' äquivalent). Zum Beispiel verbindet die Kurve

$$A_a(t) = \begin{pmatrix} \exp(t\pi i) & ta \\ 0 & \exp(-t\pi i) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

die Matrix  $A_a$  innerhalb  $SL(2, \mathbb{C})$  stetig mit der Identität.

**Proposition 41.** *Keine Matrix der Form (3.13) liegt im Bild der Exponentialfunktion.*

*Beweis.* Wir nehmen das Gegenteil an, also das gälte  $\exp(X) = A_a$ . Damit  $\exp(X) \in SL(2, \mathbb{C})$  muss wegen (3.4)  $\text{spur}(X) = 0$  gelten. Die Eigenwerte von  $X$  sind also  $\pm\lambda$  und genügen  $\exp(\pm\lambda) = -1$ , da  $-1$  der Eigenwert von  $A_a$  ist. Also ist  $\lambda = i\pi$ . Insbesondere ist  $X$  diagonalisierbar da ihre Eigenwerte verschieden sind. Es existiert also ein  $T \in GL(2, \mathbb{C})$ , so dass  $T \cdot D \cdot T^{-1} = X$  mit  $D = \text{diag}(\lambda, -\lambda)$ . Dann muss wegen  $\exp(\pm\lambda) = -1$  gelten  $A_a = \exp(X) = T \cdot \exp(D) \cdot T^{-1} = T \cdot \text{diag}(-1, -1) \cdot T^{-1} = \text{diag}(-1, -1)$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$

Trotz des Fehlens globaler In- und Surjektivität gelten beide lokal. Differenzieren wir die Abbildung  $\exp : \text{Mat}(n, \mathbb{F}) \rightarrow GL(n, \mathbb{F})$  an der Stelle  $0 \in \text{Mat}(n, \mathbb{F})$ , so erhalten wir die Identitätsabbildung  $\text{id} \in \text{End}(\text{Mat}(n, \mathbb{F}))$ :  $\exp'(0) = \text{id}$ . Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert also eine offene Umgebung  $U \subset \text{Mat}(n, \mathbb{F})$  der Nullmatrix und eine offene Umgebung  $V \subset GL(n, \mathbb{F})$  der Einheitsmatrix, so dass  $\exp|_U : U \rightarrow V$  eine glatte (unendlich differenzierbare) Bijektion mit glatter Umkehrung ist. Schränkt man  $\exp$  auf die Lie-Unteralgebra  $\mathfrak{g} \subset \text{Mat}(n, \mathbb{F})$  so erhält man die entsprechenden Aussagen mit  $U' = U \cap \mathfrak{g}$  und  $V' = V \cap G$ . Außerdem gilt:

**Proposition 42.** *Ist  $G$  zusammenhängende Lie-Gruppe, so ist jedes  $A \in G$  das Produkt endlich vieler Exponentialbilder, d.h. es existieren  $X_i \in \mathfrak{g}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so dass*

$$A = \exp(X_1) \cdot \exp(X_2) \cdots \exp(X_n). \quad (3.15)$$

*Beweis.* Sei  $G' \subset G$  die Menge der Elemente der Form (3.15). Diese Menge ist zusammenhängend, denn jedes ihrer Elemente kann durch einen stetigen Pfad mit der Gruppenidentität verbunden werden (ersetze in (3.15) alle  $X_i$  durch  $tX_i$ ). Außerdem ist klar, dass  $G'$  eine offene Umgebung der Gruppenidentität enthält, denn das trifft, wie bereits gezeigt, schon für das Bild von  $\exp$  zu, das ja in  $G'$  enthalten ist. Letztlich ist klar, dass  $G'$  eine Untergruppe ist, denn das Inverse eines Ausdruckes der Form (3.15) sowie endliche Produkte solcher Ausdrücke sind wieder von dieser Form. Wir schließen nun wie folgt: Sei  $V \subset G'$  eine offene Umgebung der Gruppenidentität und  $g \in G'$ , dann ist  $V_g := g \cdot V \subset G'$  eine Umgebung von  $g$ . In einer topologischen Gruppe  $G$  ist aber die Linksmultiplikation mit einem Element  $g$  ein Homöomorphismus auf  $G$ , denn sie besitzt die stetige Inverse die durch Linksmultiplikation mit  $g^{-1}$  gegeben ist. Insbesondere ist die Linksmultiplikation mit  $g$  also eine offene Abbildung (bildet offene Mengen in offene Mengen ab). Also ist  $g \cdot V$  offene Umgebung von  $g$  in  $G'$

und damit  $G'$  selbst offen in  $G$ .  $G'$  ist aber auch abgeschlossen, denn die Nebenklassen  $g \cdot G'$  sind wie gerade gesehen offen, und  $G'$  ist das Komplement der Vereinigung aller von  $G'$  verschiedenen Nebenklassen. Da  $G$  zusammenhängend ist und  $G' \subseteq G$  offen und abgeschlossen ist, gilt also  $G' = G$ .  $\square$

**Bemerkung 43.** Der gerade gegebene Beweis zeigt sogar, dass jede offene Umgebung  $V$  der Gruppenidentität in einer zusammenhängenden topologischen Gruppe die Gruppe „erzeugt“, in dem Sinne, dass jedes Gruppenelement als das Produkt endlich vieler Elemente aus  $V$  geschrieben werden kann. Da jede offene Untergruppe einer topologischen Gruppe auch abgeschlossen ist (wie ebenfalls das obige Argument zeigt), folgt daraus, dass eine zusammenhängende Gruppe keine echten offenen Untergruppen besitzen kann. Abgeschlossene Untergruppen existieren natürlich und sogar auch solche, die weder offen noch abgeschlossen sind. Ein Beispiel für letztere ist eine Kurve auf dem 2-Torus mit irrationaler Steigung. Sie definiert eine Untergruppe isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen innerhalb der kompakten Gruppe  $\mathbb{U}(1) \times \mathbb{U}(1)$ .