Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2016/17

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1 (Aktionen Abel'scher Gruppen)

Zeigen Sie: Ist $\Phi : G \times M \to M$ eine effektive und transitive Aktion einer Abel'schen Gruppe G auf einer Menge M, dann ist die Aktion sogar einfach-transitiv. Sagen Sie in Worten, was das für die Translationen im Ortsraum bedeutet.

Aufgabe 2 (allgemeine semi-direkte Produkte)

In dieser Aufgabe wiederholen wir die allgemeine Definition des *semi-direkten Produkts* zweier Gruppen.

Seien H und G Gruppen und $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(H)$, $g \mapsto \alpha_g$, ein Homomorphismus der Gruppe G in die Gruppe der Automorphismen von H. Zur Erinnerung: Ein Automorphismus von H ist eine Abbildung $\alpha : H \to H$ mit $\alpha(e) = e$ (e = neutrales Element) und $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$ für alle $g, h \in H$. Die Menge der Automorphismen bilden selbst eine Gruppe, wenn man als Gruppenmultiplikation als Komposition von Abbildungen nimmt.

Auf der Menge $H \times G$ betrachte man nun folgende Multiplikationsvorschrift

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1 \alpha_{g_1}(h_2)\,,\ g_1 g_2)\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass (1) eine Gruppenstruktur definiert. Die Menge $H \times G$ versehen mit dieser Struktur bezeichnet man mit $H \rtimes_\alpha G$ und nennt sie das *semidirekte Produkt von* H *mit* G *bezüglich* α.

Bezeichnen e_H und e_G die neutralen Elemente in H bzw. G. Zeigen Sie weiter, dass $\hat{H} := H \times e_G \subset H \times G$ und $\hat{G} := e_H \times G \subset H \times G$ zu H bzw. G isomorphe Untergruppen von $H \rtimes_\alpha G$ sind, wobei $\hat{H}$ sogar invariant (d.h. normale Untergruppe) ist. Welche Bedingung muss α erfüllen, damit auch $\hat{G}$ invariant ist? Was ist der Durchschnitt $\hat{H} \cap \hat{G}$? Bestimmen Sie die Untergruppen $\hat{G}_h := h \cdot \hat{G} \cdot h^{-1}$ für $h \in \hat{H}$ und deren Schnitte $\hat{G}(h, h') := \hat{G}_h \cap \hat{G}_{h'}$. Interpretieren Sie $\hat{G}_h$ und $\hat{G}(h, h')$ am Beispiel der Gruppe der euklidischen Bewegungen im $\mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie zuletzt folgende Umkehrung: Ist F eine Gruppe mit Untergruppen H und G, so dass 1) H ein Normalteiler ist, 2) $F = HG := \{gh \mid g \in G, \quad h \in H\}$ und 3) $H \cap G = \{e\}$ ($e \in F$ neutrales Element). Dann existiert ein $\alpha \in \mathrm{Hom}\big(G, \mathrm{Aut}(H)\big)$, so dass F isomorph ist zu $H \rtimes_\alpha G$.

Aufgabe 3 (spezielle semi-direkte Produkte)

In dieser Aufgabe lernen wir spezielle semi-direkte Produkte kennen, die in der Physik immer wieder vorkommen (siehe z.B. die nächste Aufgabe).

Im Folgenden stehe $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei H die additive Gruppe $\mathbb{K}^n$ und $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ eine Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Als Abbildung α nimmt man die Identität, was sinnvoll ist, da $Aut(\mathbb{K}^n) \cong GL(n, \mathbb{K})$. Wir schreiben $\alpha_A(a) =: A \cdot a$ (Multiplikation des Vektors a mit der Matrix A.) Das semidirekte Produkt $\mathbb{K}^n \rtimes G$ ist nun gegeben durch

$$(a_1, A_1)(a_2, A_2) = (a_1 + A_1 \cdot a_2\,,\; A_1 \cdot A_2)\,. \tag{2}$$

Man nennt $\mathbb{K}^n \rtimes G$ auch oft die zu $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ gehörige *inhomogene Gruppe* IG.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{K} \rtimes G \to GL(n+1, \mathbb{K})$, gegeben durch

$$(a, A) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0^\top \\ a & A \end{pmatrix} \tag{3}$$

ein injektiver Homomorphismus (auch „Einbettung“ genannt) ist. Dabei ist die Matrix auf der rechten Seite 1+n zerlegt, wobei $0^\top$ der n-dimensionale Null-Zeilenvektor ist.

Aufgabe 4 (Galilei Gruppe)

Die eigentliche orthochrone (keine Raum- und keine Zeitspiegelungen) inhomogene Galilei Gruppe $IGal_+^\uparrow$ ist das semidirekte Produkt der eigentlich orthochronen homogenen Galilei Gruppe $Gal_+^\uparrow$ mit der Gruppe $\mathbb{R}^4$ raumzeitlicher Translationen. $Gal_+^\uparrow \subset GL(4, \mathbb{R})$ wird parametrisiert durch räumliche Drehungen

$$R(\mathbf{D}) := \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\,, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{D} \in SO(3) \tag{4}$$

und Boosts (Geschwindigkeitstransformationen)

$$B(\vec{v}) := \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{v} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\,, \quad \text{wobei} \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3\,. \tag{5}$$

Die allgemeine Transformation in $Gal_+^\uparrow$ ist dann gegeben durch

$$G(\vec{v}, \mathbf{D}) := B(\vec{v}) \cdot R(\mathbf{D})\,. \tag{6}$$

Berechnen Sie $G(\vec{v}_1, \mathbf{D}_1) \cdot G(\vec{v}_2, \mathbf{D}_2)$ und stellen Sie dadurch die Gruppenmultiplikation in den Parametern $\vec{v}$ und $\mathbf{D}$ dar. Zeigen Sie, dass

$$Gal_+^\uparrow \cong \mathbb{R}^3 \rtimes_\alpha SO(3)\,, \tag{7a}$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha : SO(3) &\to Aut(\mathbb{R}^3) \cong GL(3, \mathbb{R}) \\ \mathbf{D} &\mapsto \alpha(\mathbf{D}) := \mathbf{D}\,. \end{aligned} \tag{7b}$$

Welchen Transformationen entspricht hier der Abel'sche Normalteiler $\mathbb{R}^3$?

Für die inhomogene Galilei-Gruppe gilt also

$$\mathrm{IGal}_+^\uparrow \cong \mathbb{R}^4 \rtimes_\beta (\mathbb{R}^3 \rtimes_\alpha \mathrm{SO}(3))\,, \tag{8a}$$

mit

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R}^3 \rtimes_\alpha \mathrm{SO}(3) &\to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^4) \cong \mathrm{GL}(4,\mathbb{R}) \\ (\vec{v}\,,\, \mathbf{D}) &\mapsto \beta(\vec{v}\,,\, \mathbf{D}) := \mathrm{B}(\vec{v}) \cdot \mathrm{R}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{v} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{8b}$$

Schreiben Sie ein allgemeines Element von $\mathrm{IGal}_+^\uparrow$ anhand der Einbettung $\mathrm{IGal}_+^\uparrow \hookrightarrow \mathrm{GL}(5,\mathbb{R})$ als 5×5 Matrix an und bestimmen Sie damit das allgemeine Multiplikationsgesetz.

Zeigen Sie, dass die von den räumlichen Translationen und Boosts zusammen erzeugte Untergruppe isomorph zur additiven Gruppe $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ ist und dass diese ebenfalls ein Abel'scher Normalteiler ist. Zeigen Sie weiter, dass die Zeittranslationen und räumlichen Drehungen zusammen eine weitere Untergruppe bilden, die isomorph zu $\mathbb{R} \times \mathrm{SO}(3)$ ist und mit der erstgenannten Untergruppe einen trivialen Schnitt besitzt. Schließen Sie daraus (vgl. den letzten Teil von Aufgabe 2), dass neben (8) eine weitere Isomorphie besteht

$$\mathrm{IGal}_+^\uparrow \cong (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \rtimes_\gamma (\mathbb{R} \times \mathrm{SO}(3))\,. \tag{9a}$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} \times \mathrm{SO}(3) &\to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cong \mathrm{GL}(6,\mathbb{R}) \\ (b\,,\, \mathbf{D}) &\mapsto \gamma(b\,,\, \mathbf{D}) := \begin{pmatrix} \mathbf{D} & -b\,\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{9b}$$

Zeigen Sie schließlich, dass man in natürlicher Weise zu den Zerlegungen (8) und (9) geführt wird, wenn man eine allgemeine Galilei-Transformation als Komposition von zeitlichen Translationen $\mathrm{T}(b)$, räumlichen Translationen $\mathrm{T}(\vec{a})$, Boosts $\mathrm{B}(\vec{v})$ und Drehungen $\mathrm{R}(\mathbf{D}$ schreibt, einmal in der Reihenfolge

$$\mathrm{G}\big[(b,\vec{a})\,,\,(\vec{v},\mathbf{D})\big] := \mathrm{T}(b) \circ \mathrm{T}(\vec{a}) \circ \mathrm{B}(\vec{v}) \circ \mathrm{R}(\mathbf{D})\,, \tag{10}$$

und einmal in der Reihenfolge (Boosts und Zeittranslation vertauscht)

$$\mathrm{G}\big[(\vec{a},\vec{v})\,,\,(b,\mathbf{D})\big] := \mathrm{T}(\vec{a}) \circ \mathrm{B}(\vec{v}) \circ \mathrm{T}(b) \circ \mathrm{R}(\mathbf{D})\,. \tag{11}$$