Übungen zur Vorlesung

**Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2016/17**

von DOMENICO GIULINI

**Blatt 5**

## Aufgabe 1

Sei $\eta$ eine symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform auf dem Vektorraum $V$ der Dimension $n > 2$. In der Vorlesung wurde insbesondere gezeigt, dass die Lie-Algebra der $\eta$ erhaltenden inhomogenen Gruppe $V \rtimes O(V, \omega)$ gegeben ist durch $\mathsf{Lie}\big(V \rtimes O(V,\eta)\big) = \mathsf{Span}\{P_a, M_{ab} \mid 1 \le a < b \le n\}$, mit

$$[P_a, P_b] = 0\,, \tag{1a}$$

$$[M_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b\,, \tag{1b}$$

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad}\, M_{bc} + \eta_{bc}\, M_{ad} - \eta_{ac}\, M_{bd} - \eta_{bd}\, M_{ac}\,. \tag{1c}$$

Zeigen Sie, dass die diese Lie-Algebra $L$ perfekt ist, d.h. $[L, L] = L$ (jedes Element ist Summe von Klie-Klammern).

*Tipp: Kontrakieren Sie die rechten Seiten von* (1) *geeignet mit* $\eta^{ab}$*, so dass Sie nach den* $P_a$*'s und* $M'_{ab}s$ *auflösen können.*

Bestimmen Sie alle eindimensionalen Darstellungen dieser Lie-Algebra und vergleichen Sie diese mit den eindimensionalen Darstellungen des Ideals aller Translationen; was fällt auf?

## Aufgabe 2

Die Verhälnisse seien wie in Aufgabe 2. Die Gruppe $G := V \rtimes O(V, \eta)$ operiert auf $V$ gemäß

$$\phi : G \times V \to V\,, \quad \big((a, A), v\big) \mapsto \phi_{(a,A)}(v) := Av + a\,. \tag{2}$$

Sei $C^\infty(V, \mathbb{R})$ der unendlich-dimensionale reelle Vektorraum aller $\mathbb{R}$-wertigen, unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $V$. Auf diesem ist $G$ dargestllt durch

$$T : G \times C^\infty(V, \mathbb{R}) \to C^\infty(V, \mathbb{R})\,, \quad T_{(a,A)} f := f \circ \phi^{-1}_{(a,A)}\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Darstellung ist.

Wir interessieren uns für die durch $T$ induzierte Darstellung $\dot{T}$ von $\mathsf{Lie}(V \rtimes O(V, \eta))$ auf $C^\infty(V, \mathbb{R})$. Betrachten Sie dazu eine Kurve $s \mapsto (a(s), A(s))$ in $G$ mit $(a(0), A(0)) = (0, \mathrm{id}_V)$ und $d/ds|_{s=0}(a(s), A(s)) = (\dot{a}, \dot{A}) \in \mathsf{Lie}(V \rtimes O(V, \eta))$. Zeigen Sie, dass

$$\dot{T}_{(\dot{a},\dot{A})} f(x) = Df(x)(-\dot{a} - \dot{A}x)\,. \tag{4}$$

Führt man eine Basis $\{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ von $V$ und die dazu duale Basis $\{\theta^a \mid a = 1, \cdots, n\}$ von $V^*$ ein, und definiert wie in der Vorlesung $\theta_a := \eta_\downarrow(e_a) = \eta_{ab}\theta^b$, mit $\eta_{ab} = \eta(e_a, e_b)$ dann bilden die $P_a := (e_a, 0)$ und $M_{ab} := (0, e_a \otimes \theta_b - e_b \otimes \theta_a)$ eine Basis von $\mathrm{Lie}(V \rtimes O(V, \eta))$ die gerade die Relationen (1) erfüllt.

Zeigen Sie:

$$\dot{T}_{P_a} f = -\partial_a f\,, \quad \dot{T}_{M_{ab}} f = (x_a \partial_b - x_b \partial_a) f\,. \tag{5}$$

Dabei ist $x_a : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \eta(x, e_a)$ die bezüglich der Basis definierte (kovariante) Koordinatenfunktion. Wir können also sagen, dass die Bilder der Basis $\{P_a, M_{ab} \mid \leq a < b \leq b\}$ von $\mathrm{Lie}(V \rtimes O(V, \eta))$ unter $\dot{T}$ die Diferentialoperatoren $-\partial_a$ und $(x_a \partial_b - x_b \partial_a)$ sind. Rechnen Sie nach, dass diese genau die Relationen (1) erfüllen.

## Aufgabe 3

Zeigen Sie: Ist $D : G \times V \to V$ eine lineare Darstellung von $G$ auf $V$, dann ist $D^* : G \times V^* \to V^*$ mit $D^*_g := (D_{g^{-1}})^\top$ eine lineare Darstellung von $G$ auf dem Dualraum $V^*$. Man nennt sie die zu $D$ duale oder Ko-Darstellung.

## Aufgabe 4

Die Verhältnisse sind wieder wie in Aufgabe 1. Wir betrachten die adjungierte Darstellung der Gruppe $G = V \rtimes O(V, \eta)$ auf ihrer Lie algebra $\mathrm{Lie}(G)$. Letztere ist als Vektorraum gegeben durch $V \oplus P_-(V \otimes V^*)$, wobei die Projektion $P_- : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Lie}(O(V, \eta))$ definiert ist durch $P_-(X) = \frac{1}{2}(A - A^\dagger)$ und $A^\dagger$ das die bezüglich $\eta$ adjungierte zu $A$ ist. Es gilt (s. Vorlesung) für symmetrische $\eta$

$$A^\dagger = \eta_\uparrow \circ A^\top \circ \eta_\downarrow\,. \tag{6}$$

Von Aufgabe 3 auf Blatt 3 wissen wir, dass die Adjungierte Darstellung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{(a,A)}(w, Y) &= \big(A(w) - A \circ Y \circ A^{-1}(a)\,,\, A \circ Y \circ A^{-1}\big) \\ &= \big(A(w) - \mathrm{Ad}_A(Y)(a)\,,\, \mathrm{Ad}_A(Y)\big)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei $A \mapsto \mathrm{Ad}_A$ die adjungierte Darstellung von $G$ bezeichnet.

Bestimmen Sie (gemäß Aufgabe 3) die Ko-Adjungierte Darstellung auf dem Dualraum von $\mathrm{Lie}(V \rtimes O(V, \eta))$, den Sie mit $V \oplus P_-^\top(V^* \otimes V)$ identifizieren können.

*Tipp: Schreiben Sei einen Vektor im Dualraum der Lie algebra als* $(p, J) \in V^* \oplus P_-^\top(V^* \otimes V)$ *und die Paarung zwischen* $(p, J)$ *und* $(w, Y) \in V \oplus P_-(V \otimes V^*)$ *als* $p(w) + \frac{1}{2}J(Y)$. *Dabei bezeichnet* $J(Y)$ *die tensorfaktorweise Parrung von* $V^* \otimes V$ *und* $V \otimes V^*$ *und der Faktor 1/2 korrigiert, dass dabei Paarungen im Unterraum der unter † antisymmetrischen Abbildungen doppelt gezählt würden. Nach Definition der adjungierten Abbildung gilt* $(p, J)\mathrm{Ad}_{(-A^{-1}a, A^{-1})}(w, Y) = \big(\mathrm{Ad}^*_{(a,A)}(p, J)\big)(w, Y)$. *Berechnen Sie mit Hilfe von* (7) *die linke Seite dieser Gleichung und stellen Sie den erhaltenen Ausdruck so um, dass Sie sie direkt* $\mathrm{Ad}^*_{(a,A)}(p, J)$ *ablesen können. Achtung: Aus* $J_1(Y) = J_2(Y)$ *für alle* $Y \in P_-(V \otimes V^*)$ *können sie nur auf* $P_-^\top(J_1) = P_-^\top(J_2)$ *schließen.*