Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2016/17

von Domenico Giulini

Blatt 6

Aufgabe 1

Seien $\{J_a \mid a = 1, 2, 3\}$ drei selbstadjungierte lineare Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum H, die

$$[J_a, J_b] = i\,\varepsilon_{ab}{}^{b} L_c \tag{1}$$

erfüllen. Wir in der Vorlesung definieren wir $J_\pm := J_1 \pm iJ_2$.

Sei $x_j \in H$ normiert und genüge $J_3 x_j = j x_j$ und $J_+ x_j = 0$. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass $j \in \mathbb{N}/2$ und haben ausgehend von x_j induktiv die Vektoren

$$x_{(m-1)} := \frac{J_- x_m}{\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}} \tag{2}$$

definiert und gezeigt, dass die $(2j + 1)$ Vektoren $\{x_j, x_{(j-1)}, \cdots, x_{(-j+1)}, x_{-j}\}$ eine orthonormierte Basis des von ihnen aufgespannten Teilraums $V_J \subset H$ bilden der invariant unter J_3 und J_- ist.

Zeigen Sie, dass V_j invariant unter J_+ ist.

Tipp: Benutzen Sie die Vertauschungsrelationen der J_+, J_-, J_3.

Aufgabe 2

Wir betrachten $C^\infty(S^2, \mathbb{C})$, also den unendlich dimensionalen komplexen Vektorraum der glatten, $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf der 2-Sphäre $S^2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}| = 1\}$. Auf S^2 wirkt die $SO(3)$ gemäß der definierenden Darstellung im $\mathbb{R}^3$ (Drehung um orientierte Achse $\vec{n}$, $\|\vec{n}\| = 1$, und Winkel α):

$$\begin{aligned} D(\vec{n}, \alpha)\vec{x} &= \vec{x}_\parallel + \cos(\alpha)\,\vec{x}_\perp + \sin(\alpha)\,\vec{n} \times \vec{x}_\perp \\ &= \vec{x} + \big(1 - \cos(\alpha)\big)\,\vec{x}_\perp + \sin(\alpha)\,\vec{n} \times \vec{x} \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Aktion definiert eine lineare Darstelllung von $SO(3)$ auf $C^\infty(S^2, \mathbb{C})$ gemäß

$$T(\vec{n}, \alpha)\psi = \psi \circ D^{-1}(\vec{n}, \alpha) = \psi \circ D(\vec{n}, -\alpha)\,. \tag{4}$$

Die zugehörige Darstellung von $\mathrm{Lie}(SO(3))$ auf $C^\infty(S^2, \mathbb{C})$ erhält man, indem man einparametrige Schaaren $D\big(\vec{n}(s), \alpha(s)\big)$ mit $\vec{n}(0) = \vec{n}$, $\alpha(0) = 0$ und $\dot{\alpha}(0) = 1$

betrachtet. Ableiten von (4) nach s bei $s = 0$ ergibt dann für die Wirkung des durch $\vec{n}$ bezeichneten Elements aus $\mathrm{Lie}(SO(3))$: $\dot{D}_{\vec{n}}\vec{x} = \vec{n} \times \vec{x}$.

Zeigen Sie damit, dass

$$\dot{T}_{\vec{n}}(\psi) = -\vec{n} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}\psi) \tag{5}$$

und vergewissern Sie sich, dass

$$\left[\dot{T}_{\vec{n}}, \dot{T}_{\vec{m}}\right] = \dot{T}_{\vec{n}\times\vec{m}}\,. \tag{6}$$

Sei $\{\vec{e}_a \mid a = 1, 2, 3\}$ eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir definieren

$$J_a := i\,\dot{T}_{\vec{e}_a} \tag{7}$$

(so dass $[J_a, J_b] = i\varepsilon_{ab}{}^{c}J_c$) und bilden in üblicher Weise (s. Vorlesung) $J_\pm := J_1 \pm iJ_2$ und $J^2 := J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$

Statt $\vec{x}$ mit $\|\vec{x}\| = 1$ führen wir sphärische Polarkoordinaten ein:

$$x = \sin\theta\cos\varphi\,, \quad y = \sin\theta\sin\varphi\,, \quad z = \cos\theta\,. \tag{8}$$

Zeigen Sie damit, dass

$$J_\pm = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\,, \tag{9a}$$

$$J_3 = -i\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,, \tag{9b}$$

$$J^2 = -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\,. \tag{9c}$$

Bestimmen Sie nun zu jeder ganzen Zahl $\ell \in \mathbb{N}$ den irreduziblen Unterraum $V_\ell \subset C^\infty(S^2, \mathbb{C})$, indem die Sie erst die Differentialgleichung $J_+\psi_\ell = 0$ lösen und auf die Lösung sukzessive Potenzen von J_- anwenden und die so erhaltenen Funktionen in der L^2-Norm auf S^2 bezüglich des Maßes $d\mu = \sin\theta\, d\theta\wedge d\varphi$ normieren. Zeigen Sie, dass Sie so die $2\ell + 1$ Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$, zu festem ℓ und $-\ell \leq m \leq \ell$ erhalten. Diese spannen also gerade die irreduziblen Unterräume zum Gewicht (Drehipuls) ℓ auf. Es gilt $J^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell + 1)Y_{\ell m}$, was mit (9c) explizit nachgerechnet werden kann aber sowieso aus der allgemeinen Konstruktion folgt (s. Vorlesung).

Aufgabe 3

Sei V ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum, $\otimes^n V^*$ das n-fache Tensorprodukt des Dualraums V^* (n-Multilinearformen) und $S \otimes^n V^* \subset \otimes^n V^*$ der Unterraum der vollständig symmetrischen n-Multilinearformen.

Zeigen Sie: Zu jedem $\Theta \in S \otimes^n V^*$ gibt es n Elemente $\phi^{(1)}, \cdots, \phi^{(n)} \in V^*$, so dass $\Theta = \phi^{(1)} \vee \cdots \vee \phi^{(n)}$. Hier bezeichnet $\vee$ das symmetrische Tensorprodukt. Zeigen Sie auch, dass die $\phi^{(k)}$ eindeutig bestimmt sind bis auf Permutation und Redefinition durch skalare Multiplikation, $\phi^{(k)} \mapsto \lambda^{(k)}\phi^{(k)}$, wobei die $\lambda^{(k)} \in \mathbb{C}$ der einzigen

Einschränkung $\lambda^{(1)} \cdot \lambda^{(2)} \cdots \lambda^{(n)} = 1$ unterliegen. Machen Sie sich klar, dass damit natürlich auch gezeigt ist, dass wir jedes $T \in S \otimes^n V$ in das symmetrische Tensorprodukt von n Vektoren $f^{(1)}, \cdots, f^{(n)} \in V$ zerlegen können. Die $\phi^{(k)}$ und $f^{(k)}$ heißen dann die zu Θ bzw. T gehörigen *Hauptspinoren* (engl. *principal spinors*).

Tipp: Es genügt zu zeigen, dass $\phi^{(1)}, \cdots, \phi^{(n)} \in V^*$ existieren so dass $\big(\Theta - \phi^{(1)} \vee \cdots \vee \phi^{(1)}\big)(v, v, \cdots, v) = 0$ für alle $v \in V$ (warum?). Drücken wir das in Komponenten (bezüglich dualer Basen in V, V^* und Tensorprodukten von V^*) aus, so heißt das

$$\big(\Theta_{A_1 \cdots A_n} - \phi^{(1)}_{(A_1} \cdots \phi^{(n)}_{A_n)}\big) v^{A_1} \cdots v^{A_n} = 0 \tag{10}$$

für alle 2-Tupel $(v^0, v^1) \in \mathbb{C}^2$. O.B.d.A können wir annehmen $v^0 = 1$ (warum?). Setzen wir dann $v^1 =: z \in \mathbb{C}$, so ist $\Theta(v, \cdots, v) = \Theta_{00\cdots 0} + z\, n \Theta_{10\cdots 0} + \cdots + z^n \Theta_{1\cdots 1}$. Folgern Sie mit Hilfe eines Ihnen bekannten Satzes, dass n komplexe Zahlentupel $\big(\phi^{(1)}_0, \phi^{(1)}_1\big), \cdots, \big(\phi^{(n)}_0, \phi^{(n)}_1\big)$ existieren, so dass dies Polynom in z gleich ist
$\big(\phi^{(1)}_0 + z\, \phi^{(1)}_1\big) \cdot \big(\phi^{(2)}_0 + z\, \phi^{(2)}_1\big) \cdots \big(\phi^{(n)}_0 + z\, \phi^{(n)}_1\big)$.

Aufgabe 4

Sei V ein komplexer Vektorraum und $\bar{V}$ sein komplex-konjugierter Raum ist. Zeigen Sie, dass $V \otimes \bar{V}$ und $V \oplus \bar{V}$ natürliche (d.h. ohne Benutzung weiterer Strukturelemente) reelle Strukuren tragen und charakterisieren Sie jeweils die reellen Vektoren. Gibt es auf V eine nicht-ausgeartete Bilinearform ε so hat z.B. $V \oplus \bar{V}^*$ auch eine (jetzt nicht mehr natürliche sondern ε benutzende) reelle Struktur. Charakterisieren Sie auch hier die rellen Vektoren.

Tipp: Die entsprechenden antilinearen Abbildungen, etwa $C : V \otimes \bar{V} \to V \otimes \bar{V}$ mit $C \circ C = \mathrm{id}_{V \otimes \bar{V}}$ kann man direkt angeben.