

Übungen zur Vorlesung
Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2019/20
von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1 (Aktionen Abel'scher Gruppen)

Zeigen Sie: Ist $\Phi : G \times M \rightarrow M$ eine effektive und transitive Aktion einer Abel'schen Gruppe G auf einer Menge M , dann ist die Aktion sogar einfach-transitiv. Sagen Sie in Worten, was das für die Translationen im Ortsraum bedeutet.

Aufgabe 2 (allgemeine semi-direkte Produkte)

In dieser Aufgabe wiederholen wir die allgemeine Definition des *semi-direkten Produkts* zweier Gruppen.

Seien H und G Gruppen und $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(H)$, $g \mapsto \alpha_g$, ein Homomorphismus der Gruppe G in die Gruppe der Automorphismen von H . Zur Erinnerung: Ein Automorphismus von H ist eine Abbildung $\alpha : H \rightarrow H$ mit $\alpha(e) = e$ ($e =$ neutrales Element) und $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$ für alle $g, h \in H$. Die Menge der Automorphismen bilden selbst eine Gruppe, wenn man als Gruppenmultiplikation als Komposition von Abbildungen nimmt.

Auf der Menge $H \times G$ betrachte man nun folgende Multiplikationsvorschrift

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1 \alpha_{g_1}(h_2), g_1 g_2). \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass (1) eine Gruppenstruktur definiert. Die Menge $H \times G$ versehen mit dieser Struktur bezeichnet man mit $H \rtimes_{\alpha} G$ und nennt sie das *semidirekte Produkt von H mit G bezüglich α* .

Bezeichnen e_H und e_G die neutralen Elemente in H bzw. G . Zeigen Sie weiter, dass $\hat{H} := H \times e_G \subset H \times G$ und $\hat{G} := e_H \times G \subset H \times G$ zu H bzw. G isomorphe Untergruppen von $H \rtimes_{\alpha} G$ sind, wobei \hat{H} sogar invariant (d.h. normale Untergruppe) ist. Welche Bedingung muss α erfüllen, damit auch \hat{G} invariant ist? Was ist der Durchschnitt $\hat{H} \cap \hat{G}$? Bestimmen Sie die Untergruppen $\hat{G}_h := h \cdot \hat{G} \cdot h^{-1}$ für $h \in \hat{H}$ und deren Schnitte $\hat{G}(h, h') := \hat{G}_h \cap \hat{G}_{h'}$. Interpretieren Sie \hat{G}_h und $\hat{G}(h, h')$ am Beispiel der Gruppe der euklidischen Bewegungen im \mathbb{R}^3 .

Zeigen Sie zuletzt folgende Umkehrung: Ist F eine Gruppe mit Untergruppen H und G , so dass 1) H ein Normalteiler ist, 2) $F = HG := \{gh \mid g \in G, h \in H\}$ und 3) $H \cap G = \{e\}$ ($e \in F$ neutrales Element). Dann existiert ein $\alpha \in \text{Hom}(G, \text{Aut}(H))$, so dass F isomorph ist zu $H \rtimes_{\alpha} G$.

Aufgabe 3 (spezielle semi-direkte Produkte)

In dieser Aufgabe lernen wir spezielle semi-direkte Produkte kennen, die in der Physik immer wieder vorkommen (siehe z.B. die nächste Aufgabe).

Im Folgenden stehe \mathbb{K} für \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Sei H die additive Gruppe \mathbb{K}^n und $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ eine Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in \mathbb{K} . Als Abbildung α nimmt man die Identität, was sinnvoll ist, da $\text{Aut}(\mathbb{K}^n) \cong GL(n, \mathbb{K})$. Wir schreiben $\alpha_A(\mathbf{a}) := A \cdot \mathbf{a}$ (Multiplikation des Vektors \mathbf{a} mit der Matrix A .) Das semidirekte Produkt $\mathbb{K}^n \rtimes G$ ist nun gegeben durch

$$(\mathbf{a}_1, A_1)(\mathbf{a}_2, A_2) = (\mathbf{a}_1 + A_1 \cdot \mathbf{a}_2, A_1 \cdot A_2). \quad (2)$$

Man nennt $\mathbb{K}^n \rtimes G$ auch oft die zu $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ gehörige *inhomogene Gruppe* IG . Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{K}^n \rtimes G \rightarrow GL(n+1, \mathbb{K})$, gegeben durch

$$(\mathbf{a}, A) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0^\top \\ \mathbf{a} & A \end{pmatrix} \quad (3)$$

ein injektiver Homomorphismus (auch „Einbettung“ genannt) ist. Dabei ist die Matrix auf der rechten Seite $1+n$ zerlegt, wobei 0^\top der n -dimensionale Null-Zeilenvektor ist.

Aufgabe 4 (Galilei Gruppe)

Die eigentliche orthochrone (keine Raum- und keine Zeitspiegelungen) inhomogene Galilei Gruppe $IGal_+^\uparrow$ ist das semidirekte Produkt der eigentlich orthochronen homogenen Galilei Gruppe Gal_+^\uparrow mit der Gruppe \mathbb{R}^4 raumzeitlicher Translationen. $Gal_+^\uparrow \subset GL(4, \mathbb{R})$ wird parametrisiert durch räumliche Drehungen

$$R(\mathbf{D}) := \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \mathbf{D} \in SO(3) \quad (4)$$

und Boosts (Geschwindigkeitstransformationen)

$$B(\vec{v}) := \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{v} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \vec{v} \in \mathbb{R}^3. \quad (5)$$

Die allgemeine Transformation in Gal_+^\uparrow ist dann gegeben durch

$$G(\vec{v}, \mathbf{D}) := B(\vec{v}) \cdot R(\mathbf{D}). \quad (6)$$

Berechnen Sie $G(\vec{v}_1, \mathbf{D}_1) \cdot G(\vec{v}_2, \mathbf{D}_2)$ und stellen Sie dadurch die Gruppenmultiplikation in den Parametern \vec{v} und \mathbf{D} dar. Zeigen Sie, dass

$$Gal_+^\uparrow \cong \mathbb{R}^3 \rtimes_\alpha SO(3), \quad (7a)$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha : SO(3) &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^3) \cong GL(3, \mathbb{R}) \\ \mathbf{D} &\mapsto \alpha(\mathbf{D}) := \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (7b)$$

Welchen Transformationen entspricht hier der Abel'sche Normalteiler \mathbb{R}^3 ?

Für die inhomogene Galilei-Gruppe gilt also

$$\text{IGal}_+^\uparrow \cong \mathbb{R}^4 \rtimes_\beta (\mathbb{R}^3 \rtimes_\alpha \text{SO}(3)), \quad (8a)$$

mit

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R}^3 \rtimes_\alpha \text{SO}(3) &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^4) \cong \text{GL}(4, \mathbb{R}) \\ (\vec{v}, \mathbf{D}) &\mapsto \beta(\vec{v}, \mathbf{D}) := \text{B}(\vec{v}) \cdot \text{R}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{v} & \mathbf{D} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8b)$$

Schreiben Sie ein allgemeines Element von IGal_+^\uparrow anhand der Einbettung $\text{IGal}_+^\uparrow \hookrightarrow \text{GL}(5, \mathbb{R})$ als 5×5 Matrix an und bestimmen Sie damit das allgemeine Multiplikationsgesetz.

Zeigen Sie, dass die von den räumlichen Translationen und Boosts zusammen erzeugte Untergruppe isomorph zur additiven Gruppe $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ ist und dass diese ebenfalls ein Abel'scher Normalteiler ist. Zeigen Sie weiter, dass die Zeittranslationen und räumlichen Drehungen zusammen eine weitere Untergruppe bilden, die isomorph zu $\mathbb{R} \times \text{SO}(3)$ ist und mit der erstgenannten Untergruppe einen trivialen Schnitt besitzt. Schließen Sie daraus (vgl. den letzten Teil von Aufgabe 2), dass neben (8) eine weitere Isomorphie besteht

$$\text{IGal}_+^\uparrow \cong (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \rtimes_\gamma (\mathbb{R} \times \text{SO}(3)). \quad (9a)$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} \times \text{SO}(3) &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cong \text{GL}(6, \mathbb{R}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{D}) &\mapsto \gamma(\mathbf{b}, \mathbf{D}) := \begin{pmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{b}\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9b)$$

Zeigen Sie schließlich, dass man in natürlicher Weise zu den Zerlegungen (8) und (9) geführt wird, wenn man eine allgemeine Galilei-Transformation als Komposition von zeitlichen Translationen $T(\mathbf{b})$, räumlichen Translationen $T(\vec{a})$, Boosts $\text{B}(\vec{v})$ und Drehungen $\text{R}(\mathbf{D})$ schreibt, einmal in der Reihenfolge

$$G[(\mathbf{b}, \vec{a}), (\vec{v}, \mathbf{D})] := T(\mathbf{b}) \circ T(\vec{a}) \circ \text{B}(\vec{v}) \circ \text{R}(\mathbf{D}), \quad (10)$$

und einmal in der Reihenfolge (Boosts und Zeittranslation vertauscht)

$$G[(\vec{a}, \vec{v}), (\mathbf{b}, \mathbf{D})] := T(\vec{a}) \circ \text{B}(\vec{v}) \circ T(\mathbf{b}) \circ \text{R}(\mathbf{D}). \quad (11)$$