Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2019/20

von DOMENICO GIULINI

Blatt 2

Aufgabe 1

Wir betrachten die Lie-Algebra $\mathsf{L} = (\mathbb{R}^3, \times)$ und ihre adjungierte Darstellung:

$$\mathsf{L} \to \mathrm{End}(\mathsf{L})\,, \quad \vec{x} \mapsto \mathrm{ad}_{\vec{x}} : \vec{y} \mapsto \mathrm{ad}_{\vec{x}}(\vec{y}) = \vec{x} \times \vec{y}\,. \tag{1}$$

Mit exp bezeichnen wir die durch ihre Potenzreihe definierte Exponentialfunktion auf $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass deren Bild in $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^3) \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ liegt.

Tipp: Sie müssen zeigen, dass $\det(\exp(\mathsf{T})) \neq 0$ *für alle* $\mathsf{T} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$.

Zeigen Sie durch Auswerten der Exponentialreihe, dass für $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{n}\| = 1$ und $\theta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp\bigl(\theta\, \mathrm{ad}_{\vec{n}}\bigr) = \mathsf{P}_{\|} + \bigl(\cos(\theta)\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + \sin(\theta)\, \mathrm{ad}_{\vec{n}}\bigr) \circ \mathsf{P}_{\perp}\,, \tag{2}$$

wo $\mathsf{P}_{\|} : \vec{x} \mapsto \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x})$ und $\mathsf{P}_{\perp} : \vec{x} \mapsto \vec{x} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x})$ die Projektionen parallel und senkrecht zu $\vec{n}$ sind.

Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass $\mathrm{ad}_{\vec{n}} \circ \mathrm{ad}_{\vec{n}} = -\mathsf{P}_{\perp}$ *und zerlegen Sie dann die Exponentialreihe in gerade und ungerade Potenzen.*

Argumentieren Sie damit, dass es sich bei $\exp\bigl(\theta\, \mathrm{ad}_{\vec{n}}\bigr)$ um eine orthogonale Drehung im $\mathbb{R}^3$ (versehen mit dem standard Skalarprodukt) mit Winkel θ um die $\vec{n}$ - Achse handelt.

Aufgabe 2

Seien $\mathsf{L}' = (V', [\cdot,\cdot]')$ und $\mathsf{L}'' = (V'', [\cdot,\cdot]'')$ zwei Lie-Algebren und $\sigma : \mathsf{L}'' \to \mathsf{Der}(\mathsf{L}')$ ein Lie-Homomorphismus. In der Vorlesung wurde die *semi-direkte Summe von* L' *mit* L'' erklärt als $\mathsf{L} = (V, [\cdot,\cdot])$ mit $V := V' \oplus V''$ und $[X' \oplus X''\,,\, Y' \oplus Y''] := ([X', Y']' + \sigma_{X''}(Y') - \sigma_{Y''}(X')) \oplus [X'', Y'']''$. Rechnen Sie nach, dass das so definierte Lie-Produkt auf V die Jacobi-Identität erfüllt.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Menge der reellen spurlosen 2×2 Matrizen eine reelle Lie-Algebra bilden, wenn man das Lie-Produkt als Kommutator definiert.

Zeigen Sie, dass sie die Lie-Algebra der Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist, die man deshalb in der Literatur auch oft mit $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass

$$X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

eine Basis von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ist mit

$$[X^+, X^-] = H, \quad [H, X^\pm] = \pm 2\, X^\pm. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ einfach ist.

Tipp: Sei $I \subseteq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *ein Ideal und* $C = x_+X^+ + x_-X^- + hH \in I$. *Benutzen Sie* (4) *und gehen Sie wie folgt vor: Ist z.B.* $x_- \neq 0$ *dann folgt durch Betrachten von* $[X^+, [X^+, C]]$, *dass* $X^+ \in I$, *was seinerseits* $I = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *nach sich zieht (wieso?). Ganz analog schließt man, falls* $x_+ \neq 0$. *Sind nun* $x_\pm = 0$ *und* $h \neq 0$, *so kann man aber ebenfalls auf* $I = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *schließen.*

Aufgabe 4

Sei $L = (V, [\cdot,\cdot])$ eine reelle Lie-Algebra der Dimension $\dim(L) := \dim(V) = n$. Wir betrachten die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als reellen Vektorraum der Dimension 2. Eine offensichtliche Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ ist dann etwa $\{1, i\}$. Wir definieren nun eine neue reelle Lie-Algebra $L' = (V', [\cdot,\cdot]')$ der Dimension $2n$ durch

$$V' := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \tag{5a}$$

mit Lie-Produkt

$$[z_1 \otimes X_1\,,\, z_2 \otimes X_2]' := z_1 z_2 \otimes [X_1, X_2] \tag{5b}$$

auf Elementen der Form $z \otimes X$ und bilinearer Fortsetzung auf ganz L'. (Dass L' damit tatsächlich zu einer Lie-Algebra wird ist eigentlich mit bloßen Auge zu sehen, oder?)

Ist $\{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ eine Basis von V dann ist eine Basis $\{e'_A \mid A = 1, \cdots, 2n\}$ von V' gegeben durch

$$e'_a := 1 \otimes e_a\,, \quad e'_{n+a} := i \otimes e_a\,, \quad (a = 1, \cdots, n)\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie $(a, b, c = 1, \cdots, n)$:

$$[e'_a, e'_b]' = C^c_{ab}\, e'_c\,, \tag{7a}$$

$$[e'_a, e'_{n+b}]' = C^c_{ab}\, e'_{n+c}\,, \tag{7b}$$

$$[e'_{n+a}, e'_{n+b}]' = -C^c_{ab}\, e'_c\,. \tag{7c}$$

Zeigen Sie weiter: Sind $K_{ab} = C^m_{an} C^n_{bm}$ die $n \times n$ Komponenten der Killing-Form K von L, dann gilt für die $2n \times 2n$ Komponenten der Killing-Form K' von L',

$$K'(e'_a\,,\, e'_b) = 2K_{ab}\,, \tag{8a}$$

$$K'(e'_a\,,\, e'_{n+b}) = 0\,, \tag{8b}$$

$$K'(e'_{n+a}\,,\, e'_{n+b}) = -2K_{ab}\,. \tag{8c}$$

Was können sie daraus ablesen hinsichtlich Erhalt von Eigenschaften wie Halbeinfachheit oder Kompaktheit unter der beschriebenen $\mathbb{C}$-Erweiterung einer reellen Lie-Algebra?

Aufgabe 5

Wir betrachten nochmals den Prozess der $\mathbb{C}$-Erweiterung einer reellen Lie-Algebra L in eine doppelt-dimensionale reelle Lie-Algebra L' der vorhergehenden Aufgabe. Wir wollen an einem Beipiel zeigen, dass für zwei nicht-isomorphe Lie-Algebren L_1 und L_2 ihre $\mathbb{C}$-Erweiterungen L_1' und L_2' sehr wohl isomorph sein können. Zeigen Sie, dass dies z.B. der Fall ist für die zwei dreidimensionalen Lie-Algebren $L_{1,2} = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$ mit

$$[e_1, e_2] = e_3 \qquad [e_2, e_3] = e_1 \qquad [e_3, e_1] = e_2\,, \tag{9a}$$

$$[e_1, e_2] = e_3 \qquad [e_2, e_3] = e_1 \qquad [e_3, e_1] = -e_2\,. \tag{9b}$$

Wir bemerken zuerst, dass die durch (9a) charakterisierte Lie-Algebra die der Gruppe der orthogonalen Drehungen im $\mathbb{R}^3$ ist (vgl. Aufgabe 1), die in der Literatur oft mit $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ bezeichnet wird, während (9b) der von Aufgabe 2 entspricht, also $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, wie man durch Basistransformation $e_1 = \frac{1}{2}(X^+ + X^-)$, $e_2 = \frac{1}{2}(X^- - X^+)$ und $e_2 = \frac{1}{2}H$ aus den Relationen (4) schnell nachrechnet. Diese beiden Algebren sind sicher nicht isomorph, wie man etwa daran sieht, dass $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ kompakt ist, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ aber nicht (was ist hier die Killing-Form?). Stellt man nun für $a = 1, 2, 3$ die sechs Basisvektoren $e_a' = 1 \otimes e_a$, $e_{3+a}' = i \otimes e_a$ von L_1' und L_2' auf und berechnet deren Lie-Klammern, so sieht man, dass die Basistransformation die e_1' mit e_4' und e_3' mit e_6' vertauscht die Relationen von L_1' in die von L_2' überführt. Zeigen Sie dies entweder durch langweiliges Nachrechnen, oder duch ein gutes Argument ohne jede Rechnung.

Zur Terminologie: Man nennt L *reelle Form* von L' wenn $L' = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} L$. Wir sehen also, dass eine Lie-Algebra verschiedene (nicht isomorphe) reelle Formen besitzen kann, darunter auch kompakte und nicht kompakte. In der Literatur nenn man $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} L$ meist die „Komplexifizierung“ von L, weil man sogleich die kanonische komplexe Struktur mitbenutzt, die dieser reellen Vektorraum besitzt. Das tun wir hier absichtlich nicht.

Aufgabe 6

In der Vorlesung wurde die Existenz der Zerlegung einer halbeinfachen Lie-Algebra in die Killing-orthogonale direkte Summe von einfachen Idealen gezeigt. Sei nun L halbeinfache Lie-Algebra und

$$L = \bigoplus_{a=1}^{N} I_n \tag{10}$$

eine solche Zerlegung. Zeigen Sie, dass diese Zerlegung eindeutig ist.

Tipp: Sei $I \subset L$ *ein einfaches Ideal; dann ist natürlich* $[I, L] := \mathrm{Span}\{[X, Y] \mid X \in I,\ Y \in L\} \subseteq I$. $[I, L]$ *kann nicht* $\{0\}$ *sein, denn sonst .... im Widerspruch zu .... Da* $[I, L]$ *selbst ein Ideal ist, was in* I *enthalten ist, muss wegen ....* $[I, L] = I$ *gelten. Aus* (10) *folgt nun* $I = [I, L] = \oplus_a [I, I_a]$. *Da* I *einfach ist kann nur ein Summand (etwa für* $a = i$*) von* $\{0\}$ *verschieden sein (warum?), so dass* $I = [I, I_i]$, *woraus Sie mit Hilfe der Einfachheit sofort auf* $I = I_i$ *schließen können.*