Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2019/20

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der 2-1 Projektionshomomorphismus $p : SU(2) \to SO(3)$, $A \mapsto p(A) = R$, gegeben ist durch (das Hoch- und Runterstellen von Indizes erfolgt mit δ_{ab} und δ^{ab})

$$R^a{}_b = -2\,\mathrm{Spur}\big(\tau^a A \tau_b A^\dagger\big)\,. \tag{1}$$

Dabei bilden die spurlosen anti-Hermite'schen Matrizen $\tau_a = -\frac{i}{2}\sigma_a$ (σ_a sind die Pauli Matrizen) eine orthonormierte Basis der Lie-Algebra von $SU(2)$ bezüglich des positiv-definiten Skalarproduktes $g(X,Y) := -2\mathrm{Spur}(X \cdot Y)$ und erfüllen $[\tau_a, \tau_b] = \epsilon_{abc}\tau^c$.

Zeigen Sie, dass zu (1) die *lokalen* Umkehrungen $i_\pm : SO(3) \subset O \to SU(2)$ existieren

$$A = i_\pm(R) := \pm\frac{1}{2} \cdot \frac{E_2 - 4\,\tau_a R^a{}_b \tau^b}{\sqrt{1 + \mathrm{Spur}(R)}}\,. \tag{2}$$

Dabei ist E_2 die 2×2 Einheitsmatrix und $O \subset SO(3)$ die offene und dichte Teilmenge der Drehungen, deren Drehwinkel von π (d.h. $180°$) verschieden ist.

Tipp: Beweisen Sie zuerst die für jede komplexe 2×2-Matrix M gültige Beziehung (Achtung: Summation über den Index a beachten!)

$$\tau_a M \tau^a = \tfrac{1}{4}\,M - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(M)\,E_2\,. \tag{3}$$

Benutzen Sie dies (für $M = A^\dagger$) um aus (1) die Spur von R auszurechnen, wobei Sie berücksichtigen, dass $\mathrm{Spur}(A^\dagger) = \mathrm{Spur}(A)$ für $A \in SU(2)$.

Aufgabe 2

Rechnen Sie nach, dass

$$\begin{aligned} A(\theta, \vec{n}) :&= \exp(\theta\, n^a \tau_a) = \exp(-\tfrac{i}{2}\theta\, n^a \sigma_a) \\ &= \cos(\theta/2)\, E_2 - i\ \sin(\theta/2)\, n^a \sigma_a \\ &= \cos(\theta/2)\, E_2 + 2\ \sin(\theta/2)\, n^a \tau_a\,. \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $\vec{n} := (n^1, n^2, n^3) \in \mathbb{R}^3$ die Komponenten eines Einheitsvektors sind.

Zeigen Sie ebenfalls durch Ausrechnen, dass das Bild von $\pm A(\theta, \vec{n})$ unter dem Projektionshomomorphismus $p : SU(2) \to SO(3)$ eine Drehung mit Winkel θ um die durch $\vec{n}$ erzeugte (orientierte) Achse ist. (Tipp: Berechnen Sie $A x^a \tau_a A^\dagger$ geschickt, indem Sie $\vec{x} := (x^1, x^2, x^3)$ in einen Teil parallel und einen senkrecht zu $\vec{n}$ zerlegen.)

Aufgabe 3

Wie in Aufgabe 2 von Blatt 2 betrachten wir die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ der Gruppe SL$(2,\mathbb{R})$. Wieder wählen wir die Basis

$$X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

mit

$$[X^+, X^-] = H, \quad [H, X^\pm] = \pm 2\, X^\pm . \tag{6}$$

Ferner sei $\mathfrak{u}(n)$ die Lie-Algebra der Gruppe U(n) aller unitären $n \times n$ Matrizen. $\mathfrak{u}(n)$ besteht also aus allen anti-Hermite'schen $n \times n$ Matrizen: $X = -X^\dagger$.

Zeigen Sie, dass jeder Homomorphismus $T : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{u}(n)$ notwendig trivial ist, d.h. ganz $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ im Kern hat. Folgern Sie daraus, dass SL$(2,\mathbb{R})$ keine nicht-trivialen endlichdimensionalen unitären Darstellungen hat. Folgern Sie weiter, dass damit die entsprechenden Aussagen auch für $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ und SL$(2,\mathbb{C})$ gelten.

Tipp: Wir schreiben zur Abkürzung $T(X) =: \hat{X}$. *Für die anti-unitäre Matrix* $\hat{X}^+$ *gilt* $(\hat{X}^+)^2 = \frac{1}{2}\hat{X}^+ \cdot [\hat{H}, \hat{X}^+]$ *(warum?). Also gilt* Spur$\big((\hat{X}^+)^2\big) = 0$ *(warum?). Daraus folgern Sie* $\hat{X}^+ = 0$ *(wie?). Die Einfachheit von* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *ergibt dann* Kern$(T) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. *Klarerweise ist* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *Lie-Unteralgebra von* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. *Die kleinste Ideal in* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *das* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *enthält (sein „Idealisator“) ist aber* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *selbst (wieso?). Also ist auch jeder Lie-Homomorphismus von* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *nach* $\mathfrak{u}(n)$ *trivial.*

Aufgabe 4

Sei V Vektorraum, $G \subseteq$ GL(V) eine Gruppe und $IG = V \rtimes_\alpha G$ das übliche semidirekte Produkt von G mit der Abel'schen Gruppe $(V,+)$, d.h der Homomorphismus $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(V)$ ist einfach die Inklusion von G in $\mathrm{Aut}(V) =$ GL(V): $\alpha(A)(v) = A(v)$.

Zeigen Sie: Als Vektorräume $\mathrm{Lie}(IG) = V \times \mathrm{Lie}(G)$, mit

$$\big[(v,X)\,,\,(w,Y)\big] = \big(X(w) - Y(v)\,,\, X \circ Y - Y \circ X\big) . \tag{7}$$

Tipp: Eine Möglichkeit, aus dem Multiplikationsgesetz der Gruppe das Lie-Produkt $[\cdot\,,\,\cdot]$ *abzuleiten, besteht darin, auszunutzen, dass die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra gerade durch die Lie-Klammer gegeben ist. Im vorliegenden Fall heißt das* $\mathrm{ad}_{(v,X)}(w,Y) = [(v,Y),(w,Y)]$. *Die Darstellung* ad *bestimmt man nun mit Hilfe zweier Kurven* $g(s)$ *und* $h(t)$ *in* IG *mit* $g(0) = h(0) = (0,e)$ *(neutrales Element in* IG, *wobei* e *neutrales Element in* G *ist) und* $\dot{g} = (v,Y)$ *sowie* $\dot{h} = (w,Y)$ *(Punkt bedeutet Ableitung am parameterwert Null). Wir schreiben also* $g(s) = \big(a(s), A(s)\big)$ *und* $h(t) = \big(b(t), B(t)\big)$ *mit* $a(0) = 0$, $A(0) = e$, $b(0) = 0$, $B(0) = e$ *und* $\dot{a} = v$, $\dot{A} = X$, $\dot{b} = w$, $\dot{B} = Y$. *Nun ist*

$$\mathrm{Ad}_{(a(s),A(s))}(w,Y) \;=\; \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(s)h(t)g^{-1}(s)\,, \tag{8a}$$

$$\mathrm{ad}_{(v,X)}(w,Y) \;=\; \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathrm{Ad}_{(a(s),A(s))}(w,Y)\,. \tag{8b}$$

Zeigen Sie somit als als ersten Zwischenschritt, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{(a,A)}(w,Y) &= \big(A(w) - A\circ Y\circ A^{-1}(a)\,,\, A\circ Y\circ A^{-1}\big) \\ &= \big(A(w) - \mathrm{Ad}_A(Y)(a)\,,\, \mathrm{Ad}_A(Y)\big)\,, \end{aligned} \tag{9}$$

wobei $A \mapsto \mathrm{Ad}_A$ die adjungierte Darstellung von G bezeichnet.

Aufgabe 5

Im Anschluss an Aufgabe 3 betrachten wir statt der adjungierten nun die die *koadjungierte* Darstellung der Gruppe IG auf dem zum Vektorraum $\mathrm{Lie}(IG)$ dualen Vektorraum $[\mathrm{Lie}(IG)]^*$. Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, G sein ganz $GL(V)$; dann sind – als Vektorräume – folgende Identifikationen natürlich: $\mathrm{Lie}(IG) \cong V \oplus \mathrm{End}(V) = V \oplus (V \otimes V^*)$ und $[\mathrm{Lie}(IG)]^* \cong V^* \oplus (V^* \otimes V)$.

Mit diesen Identifikationen erfolgt diee natürliche Paarung von Elementen in $[\mathrm{Lie}(IG)]^*$ mit Elementen in $\mathrm{Lie}(IG)$ nun summanden- bzw. faktorweise. In Komponenten sieht das dann wie folgt aus: Sei $\{e_a, a = 1\cdots n\}$ Basis von V mit zugehöriger Dualbasis $\{\theta^a, a = 1\cdots n\}$ von V^*, dann schreiben wir $(y,Y) \in \mathrm{Lie}(IG)$ als $y = y^a e_a \in V$ und $Y = Y^a_b e_a \otimes \theta^b \in \mathrm{End}(V)$. Ebenso schreiben wir $(\sigma,\Sigma) \in [\mathrm{Lie}(IG)]^*$ als $\sigma = \sigma_a\theta^a$ und $\Sigma = \Sigma^b_a \theta^a \otimes e_b$. Dann ist das Bild von (y,Y) unter (σ,Σ) gegeben durch $(\sigma,\Sigma)[(y,Y)] = \sigma_a y^a + \Sigma^b_a Y^a_b$.

Die koadjungierte Darstellung $\mathrm{Ad}^* : IG \to GL([\mathrm{Lie}(IG)]^*)$ ist nun definiert als die *kontragrediente Darstellung* der adjungierten Darstellung; das heißt deren *Transponiert-Inverse*:

$$\mathrm{Ad}^*_{(a,A)}(\sigma,\Sigma) := (\sigma,\Sigma)\circ \mathrm{Ad}_{(a,A)^{-1}}\,. \tag{10}$$

Zeigen Sie, dass die koadjungierte Darstellung in Komponenten gegeben ist durch

$$\mathrm{Ad}^*_{(a,A)}(\sigma,\Sigma) = \Big(A^*\sigma\,,\,(A^*\otimes A)\Sigma + A^*\sigma\otimes a\Big)\,, \tag{11}$$

wobei A^* die Darstellung von $A \in GL(V)$ auf V^*, ist, also die kontragrediente (transponiert inverse), d.h., $A^*\sigma = \sigma \circ A^{-1}$, oder in Komponenten $(A^*\sigma)_a = (A^{-1})^c_a\sigma_c$.

Wie verändert sich (11) wenn $G \subset GL(V)$ eine echte Untergruppe ist, z.B. die orthogonale Gruppe bezüglich eines inneren Produktes (nicht notwendig positiv definit) auf V? (Tipp: Sie müssen in diesem Fall sicherstellen, dass der letzte Term $A^*\sigma \otimes a$ im Dualraum zu $\mathrm{Lie}(G) \subset \mathrm{End}(V)$ liegt, also einem linearen Unterraum zu $V^* \otimes V$.)