Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2019/20

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Wiederholung aus der Vorlesung

Wie in der Vorlesung sei die folgende $(1+3)\times(1+3)$ – Matrix

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^\top \\ \vec{b} & M \end{pmatrix} \tag{1}$$

die Darstellung einer allgemeine Lorentztransformation in $\mathrm{Lor}_+^\uparrow$. Dann gelten die Relationen

$$\vec{a}^2 = \gamma^2 - 1\,, \qquad M\vec{a} \;\;= \gamma\vec{b}\,, \qquad MM^\top = E_3 + \vec{b}\otimes\vec{b}^\top\,, \tag{2a}$$

$$\vec{b}^2 = \gamma^2 - 1\,, \qquad M^\top\vec{b} = \gamma\vec{a}\,, \qquad M^\top M = E_3 + \vec{a}\otimes\vec{a}^\top\,. \tag{2b}$$

Mit Hilfe dieser Relationen wurde dann nachgewiesen, dass

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^\top \\ \vec{b} & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\vec{\beta}^\top \\ \gamma\vec{\beta} & E_3 + (\gamma-1)\vec{n}\otimes\vec{n}^\top \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & D \end{pmatrix} =: B(\vec{\beta})\cdot R(D)\,. \tag{3a}$$

Hier ist

$$D := M - \frac{\vec{b}\otimes\vec{a}^\top}{1+\gamma} \qquad \in SO(3)\,, \tag{3b}$$

$$\vec{\beta} := \vec{b}/\gamma = \vec{n}\beta = \vec{n}(1-\gamma^{-2})^{1/2} \qquad \in B_1 \subset \mathbb{R}^3\,. \tag{3c}$$

Die Drehung D genügt

$$D\vec{a} = \vec{b}\,. \tag{4}$$

Diese Polarzelegung entspricht der Zerlegung einer allgemeinen Lorentztransformation in eine Drehung $R(D)$ und einen Boost $B(\vec{\beta})$. Die Größen $D \in SO(3)$ und $\vec{\beta} \in B_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ unterliegen keinen weiteren Einschränkugne, so dass wir die Lorentztransformationen treu durch $B_1 \times SO(3)$ parametrisieren können. Wir schreiben dann $L(\vec{\beta}, D) := B(\vec{\beta})R(D)$. Die Polarzerlegung definiert dann einen topologischen Homöomorphismus $\mathrm{Lor}_+^\uparrow \cong B_1 \times SO(3) \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}P^3$.

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit Hilfe der Relationen (2), dass

$$D\vec{a} = \vec{b}\,, \tag{5a}$$

dass also D eine Drehung in der orientierten Ebene $\mathrm{Span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ darstellt, deren Winkel $\theta \in [0, \pi]$ gegeben ist durch

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Spur}(M) - 1}{\gamma + 1}\,. \tag{5b}$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie

$$R(D)B(\vec{\beta})R(D^{-1}) = B(D\vec{\beta})\,. \tag{6}$$

Wir definieren die beiden Abbidungen

$$\star : B_1 \times B_1 \to B_1\,, \qquad (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2) \mapsto \vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2\,, \tag{7a}$$

$$T : B_1 \times B_1 \to SO(3)\,, \quad (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2) \mapsto T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]\,, \tag{7b}$$

durch

$$B(\vec{\beta}_1)B(\vec{\beta}_2) =: B(\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2) \cdot R(T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2])\,. \tag{7c}$$

Man nennt $\star$ das „Einstein'sche Additionsgesetz“ für Geschwindigkeiten (hier in Einheiten von c; d.h. $\vec{\beta} = \vec{v}/c$) und $T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]$ die zum geordneten Paar von Geschwindigkeiten $\vec{\beta}_1$ und $\vec{\beta}_2$ gehörige „Thomas-Drehung“.

Zeigen Sie

$$\vec{0} \star \vec{\beta} \;=\; \vec{\beta} \star \vec{0} \;=\; \vec{\beta}\,. \tag{8a}$$

$$T[\vec{0}, \vec{\beta}] \;=\; T[\vec{\beta}, \vec{0}] \;=\; E_3\,. \tag{8b}$$

Wenden Sie (6) auf (7c) an und leiten Sie dann aus der Eindeutigkeit der Polarzerlegung folgende Äquivarianzeigenschaften für die Funktionen $\star$ und T unter Drehungen ab:

$$D(\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2) \;=\; (D\vec{\beta}_1) \star (D\vec{\beta}_2)\,, \tag{9a}$$

$$D\,T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]\,D^{-1} \;=\; T[D\vec{\beta}_1\,, D\vec{\beta}_2]\,. \tag{9b}$$

Zeigen Sie nun weiter, dass das allgemeine Multiplikationsgesetz der Lorentzgruppe in den Parametern β und D mit Hilfe der Funktionen $\star$ und T wie folgt lautet:

$$L(\vec{\beta}_1, D_1)L(\vec{\beta}_2, D_2) = L(\vec{\beta}, D) \tag{10a}$$

mit

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 \star D_1\vec{\beta}_2\,, \tag{10b}$$

$$D = T[\vec{\beta}_1, D_1\vec{\beta}_2]D_1D_2\,. \tag{10c}$$

Rechnen Sie nach, dass $B(\vec{\beta})B(-\vec{\beta}) = E_4$ und folgern Sie

$$\vec{\beta} \star (-\vec{\beta}) \;=\; (-\vec{\beta}) \star \vec{\beta} \;=\; \vec{0}\,, \tag{11a}$$

$$T[\vec{\beta}, -\vec{\beta}] \;=\; T[-\vec{\beta}, \vec{\beta}] \;=\; E_3\,. \tag{11b}$$

Leiten Sie daraus ab, dass

$$\big[L(\vec{\beta}, D)\big]^{-1} = L\big(-D^{-1}\vec{\beta}, D^{-1}\big)\,. \tag{12}$$

Aufgabe 3

Wir benutzen die Bezeichnungen aus der obigen Wiederholung sowie die Notationen $\gamma(\beta) = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ mit $\beta := \|\vec{\beta}\|$ und $\beta_1 \star \beta_2 := \|\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2\|$.

Zeigen Sie

$$\gamma(\beta_1 \star \beta_2) = \gamma(\beta_1)\gamma(\beta_2)(1 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)\,, \tag{13}$$

und weiter

$$\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2 = \frac{\vec{\beta}_1 + P_{\|}(\vec{\beta}_2) + \gamma^{-1}(\beta_1)P_{\perp}(\vec{\beta}_2)}{1 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2}\,. \tag{14}$$

Dabei sind $P_{\|}$ und $P_{\perp}$ die Euklid'schen Orthogonalprojektionen parallel zu und senkrecht auf $\vec{\beta}_1$.

Zeigen Sie schließlich: Ist φ der Winkel zwischen $\vec{\beta}_1$ und $\vec{\beta}_2$, dann ist $T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]$ eine Drehung in der orientierten Ebene $\mathrm{Span}\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2\}$ deren Winkel θ bestimmt ist durch

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)\sin^2\varphi}{1 + \gamma_1\gamma_2 + \sqrt{(\gamma_1^2 - 1)(\gamma_2^2 - 1)}\,\cos\varphi}\,, \tag{15}$$

wobei $\gamma_a := \gamma(\beta_a)$ $(a = 1, 2)$.

Zeigen Sie, dass bei festgehaltenem φ der Winkel θ im Limes $\gamma_{1,2} \to \infty$ gegen φ strebt. Lässt man umgekehrt $\gamma_{1,2}$ fest und betrachtet den Winkel θ als Funktion von φ, dann hat diese Funktion ein Maximum bei

$$\cos(\varphi_m) = -\sqrt{\frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)}} \tag{16a}$$

mit einem Wert $\theta_m := \theta(\varphi_m)$, für den gilt

$$\cos(\theta_m) = 1 - 2\,\frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} = -\cos(2\varphi_m)\,, \tag{16b}$$

also

$$\theta_m = 2\varphi_m - \pi\,. \tag{16c}$$

Setzen Sie $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ und bestimmen Sie den Schwellenwert $\gamma_{\pi/2}$ für γ, oberhalb dem $\theta_m > \pi/2$. Welcher Schwellengeschwindigkeit $\beta_{\pi/2}$ entspricht das? Beachten Sie: Aus (16c) folgt , dass der Winkel φ_m zwischen den Boostrichtungen, bei dem θ_m gerade $\pi/2$ ist, immer bei $\varphi_m = 3\pi/4$ (entsprechend 135°) liegt, unabhängig davon, ob die Geschwindigkeiten gleich sind oder nicht. Für höhere Geschwindigkeiten ist $\theta = \pi/2$ auch für kleinere φ zu erreichen, wie etwa $\theta \to \varphi$ für $\gamma_{1,2} \to \infty$ zeigt (s.o.).

Aufgabe 4

Geben Sie eine geometrische Interpretation von (13), indem Sie diese Gleichung in die Rapiditäten $\rho := \tanh^{-1}(\beta)$ umschreiben. *Tipp: Cosh-Satz für die Seiten eines hyperbolischen Dreiecks.*

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Einstein'sche Addition $\star$ weder kommutativ noch assoziativ ist und stattdessen folgende Relationen gelten:

$$\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2 = T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2](\vec{\beta}_2 \star \vec{\beta}_1) \tag{17}$$

und

$$\vec{\beta}_1 \star (\vec{\beta}_2 \star \vec{\beta}_3) = (\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2) \star T[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]\vec{\beta}_3 \,. \tag{18}$$

Tipp: Gleichung (17) *folgt aus* (5a) *angewandt auf* (7c). *Zur Ableitung von* (18) *gehen Sie aus von* $B(\vec{\beta}_1)\big(B(\vec{\beta}_2)B(\vec{\beta}_3)\big) = \big(B(\vec{\beta}_1)B(\vec{\beta}_2)\big)B(\vec{\beta}_3)$ *[d.h. Assoziativität innerhalb der Lorentzgruppe], zerlegen beide Seiten polar und Vergleichen dann die Boost-Anteile (Eindeutigkeit der Polarzerlegung!).*

Aufgabe 6

Sei $L = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$ die Lie-Algebra der $SO(3)$, so dass $[e_a, e_b] = \varepsilon_{ab}{}^n e_n$. Beschreiben Sie die Lie-Algebra, die durch Kontraktion über $H = \mathrm{Span}\{e_3\}$ entsteht. Zu welcher Lie-Gruppe ist sie die Lie-Algebra?