Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2019/20

von Domenico Giulini

Blatt 5

Aufgabe 1

Sei η eine symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform auf dem Vektorraum V der Dimension $n > 2$. In der Vorlesung wurde insbesondere gezeigt, dass die Lie-Algebra der η erhaltenden inhomogenen Gruppe $V \rtimes O(V,\omega)$ gegeben ist durch $\mathsf{Lie}\big(V \rtimes O(V,\eta)\big) = \mathsf{Span}\{P_a, M_{ab} \mid 1 \le a < b \le n\}$, mit

$$[P_a, P_b] = 0\,, \tag{1a}$$
$$[M_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b\,, \tag{1b}$$
$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad}\,M_{bc} + \eta_{bc}\,M_{ad} - \eta_{ac}\,M_{bd} - \eta_{bd}\,M_{ac}\,. \tag{1c}$$

Zeigen Sie, dass diese Lie-Algebra L perfekt ist, d.h. $[L,L] = L$ (jedes Element ist Summe von Klie-Klammern).

Tipp: Kontrahieren Sie die rechten Seiten von (1) *geeignet mit* η^{ab}*, so dass Sie nach den* P_a*'s und* $M'_{ab}s$ *auflösen können.*

Bestimmen Sie alle eindimensionalen Darstellungen dieser Lie-Algebra und vergleichen Sie diese mit den eindimensionalen Darstellungen des Ideals aller Translationen; was fällt auf?

Aufgabe 2

Die Verhälnisse seien wie in Aufgabe 2. Die Gruppe $G := V \rtimes O(V,\eta)$ operiert auf V gemäß

$$\phi : G \times V \to V\,, \quad \big((a,A),v\big) \mapsto \phi_{(a,A)}(v) := Av + a\,. \tag{2}$$

Sei $C^\infty(V,\mathbb{R})$ der unendlich-dimensionale reelle Vektorraum aller $\mathbb{R}$-wertigen, unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf V. Auf diesem ist G dargestellt durch

$$T : G \times C^\infty(V,\mathbb{R}) \to C^\infty(V,\mathbb{R})\,, \quad T_{(a,A)}f := f \circ \phi^{-1}_{(a,A)}\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Darstellung ist.

Wir interessieren uns für die durch T induzierte Darstellung $\dot{T}$ von $\mathsf{Lie}(V \rtimes O(V,\eta))$ auf $C^\infty(V,\mathbb{R})$. Betrachten Sie dazu eine Kurve $s \mapsto (a(s),A(s))$ in G mit $(a(0),A(0)) = (0,\mathrm{id}_V)$ und $d/ds|_{s=0}(a(s),A(s)) = (\dot{a},\dot{A}) \in \mathsf{Lie}(V \rtimes O(V,\eta))$. Zeigen Sie, dass

$$\dot{T}_{(\dot{a},\dot{A})}f(x) = Df(x)(-\dot{a} - \dot{A}x)\,. \tag{4}$$

Führt man eine Basis $\{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ von V und die dazu duale Basis $\{\theta^a \mid a = 1, \cdots, n\}$ von V^* ein, und definiert wie in der Vorlesung $\theta_a := \eta_\downarrow(e_a) = \eta_{ab}\theta^b$, mit $\eta_{ab} = \eta(e_a, e_b)$, dann bilden die $P_a := (e_a, 0)$ und $M_{ab} := (0, e_a \otimes \theta_b - e_b \otimes \theta_a)$ eine Basis von $\mathrm{Lie}(V \rtimes O(V, \eta))$ die gerade die Relationen (1) erfüllt.

Zeigen Sie:

$$\dot{T}_{P_a} f = -\partial_a f\,, \quad \dot{T}_{M_{ab}} f = (x_a \partial_b - x_b \partial_a) f\,. \tag{5}$$

Dabei ist $x_a : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \eta(x, e_a)$ die bezüglich der Basis definierte (kovariante) Koordinatenfunktion. Wir können also sagen, dass die Bilder der Basis $\{P_a, M_{ab} : 1 \leq a < b \leq n\}$ von $\mathrm{Lie}(V \rtimes O(V, \eta))$ unter $\dot{T}$ die Diferentialoperatoren $-\partial_a$ und $(x_a \partial_b - x_b \partial_a)$ sind. Rechnen Sie nach, dass diese genau die Relationen (1) erfüllen.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Lie-Algebra der Gruppe $O(V, \eta)$, wobei V ein 5-dimensionaler reeller Vektorraum und η eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinarform der Signatur $(+, -, -, -, \sigma)$ ist, wobei wir $\sigma = \mp$ offen lassen. Ist $\sigma = -$ dann nennt man die Gruppe auch $O(1, 4)$ oder *de Sitter*-Gruppe, im Fall $\sigma = +$ heißt sie $O(2, 3)$ oder *anti-de Sitter*-Gruppe. Basen der zugehörigen 10-dimensionalen Lie-Algebren sind $\{M_{ab} : 0 \leq a < b \leq 4\}$ und genügen (1c).

Wir führen folgende Umbenennungen der Basiselemente ein, wobei $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ und $\varepsilon_{abc} = \mathrm{sign}\binom{123}{abc}$ unabhängig davon, ob die Indizes an ε oben oder unten stehen (um der Summenkonvention zu genügen):

$$D_a := \tfrac{1}{2} \varepsilon_a{}^{bc} M_{bc}\,, \tag{6a}$$

$$K_a := M_{0a}\,, \tag{6b}$$

$$T_a := M_{a4}\,, \tag{6c}$$

$$T_0 := M_{04}\,. \tag{6d}$$

Zeigen Sie, dass die Lie-Algebren $\mathrm{Lie}(O(1, 4))$ bzw. $\mathrm{Lie}(O(2, 3))$ durch folgende 45 Relationen charakterisiert sind:

$$[D_a, D_b] = \varepsilon_{ab}{}^c D_c\,, \tag{7a}$$

$$[D_a, K_b] = \varepsilon_{ab}{}^c K_c\,, \tag{7b}$$

$$[D_a, T_b] = \varepsilon_{ab}{}^c T_c\,, \tag{7c}$$

$$[D_a, T_0] = 0\,, \tag{7d}$$

$$[K_a, K_b] = -\varepsilon_{ab}{}^c D_c\,, \tag{7e}$$

$$[K_a, T_b] = -\delta_{ab} T_0\,, \tag{7f}$$

$$[K_a, T_0] = -T_a\,, \tag{7g}$$

$$[T_a, T_b] = -\sigma\, \varepsilon_{ab}{}^c D_c\,, \tag{7h}$$

$$[T_a, T_0] = \sigma K_a\,. \tag{7i}$$

Zeigen Sie, dass die durch

$$\Pi\ :\ (T_0, T_a, K_a, D_a) \mapsto (T_0, -T_a, -K_a, D_a)\,, \tag{8a}$$
$$\Theta\ :\ (T_0, T_a, K_a, D_a) \mapsto (-T_0, T_a, -K_a, D_a)\,, \tag{8b}$$
$$\Gamma\ :\ (T_0, T_a, K_a, D_a) \mapsto (-T_0, -T_a, K_a, D_a)\,, \tag{8c}$$

definierten linearen Abbildungen der Lie-Algebren tatsächlich Automorphismen sind. Wie interpretieren Sie diese?

Zeigen, Sie, dass die durch $U_1 := \{D_a, K_a : 1 \leq a \leq 3\}$ und $U_2 := \{D_a, T_a : 1 \leq a \leq 3\}$ erzeugten 6-dimensionalen Unterräume Lie-Unteralgebren sind und führen Sie die Kontraktionen über diesen aus. Kennen Sie die so erhaltenen Lie-Algebren? Was unterscheidet Sie? Was erhält man durch Hintereinanderausführen dieser beiden Kontraktionen? Hängt das Ergebnis von der Reihenfolge ab? Und wohin gelangt man, wenn man jeweils nach den Kontraktionen über U_1 oder U_2 noch die über $U_3 := \{D_a, T_0 : a = 1, 2, 3\}$ ausführt? Kenn Sie diese Lie-Algebren? Was unterscheidet sie?