Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2019/20

von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Aufgabe 1

Seien $\{J_a \mid a = 1, 2, 3\}$ drei selbstadjungierte lineare Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum H, die

$$[J_a, J_b] = i\,\varepsilon_{ab}{}^c J_c \tag{1}$$

erfüllen. Wir in der Vorlesung definieren wir $J_\pm := J_1 \pm iJ_2$.

Sei $x_j \in H$ normiert und genüge $J_3 x_j = j x_j$ und $J_+ x_j = 0$. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass $j \in \mathbb{N}/2$ und haben ausgehend von x_j induktiv die Vektoren

$$x_{(m-1)} := \frac{J_- x_m}{\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}} \tag{2}$$

definiert und gezeigt, dass die $(2j+1)$ Vektoren $\{x_j, x_{(j-1)}, \cdots, x_{(-j+1)}, x_{-j}\}$ eine orthonormierte Basis des von ihnen aufgespannten Teilraums $V_J \subset H$ bilden der invariant unter J_3 und J_- ist.

Zeigen Sie, dass V_j invariant unter J_+ ist.

Tipp: Benutzen Sie die Vertauschungsrelationen der J_+, J_-, J_3.

Aufgabe 2

Wir betrachten $C^\infty(S^2, \mathbb{C})$, also den unendlich dimensionalen komplexen Vektorraum der glatten, $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf der 2-Sphäre $S^2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}| = 1\}$. Auf S^2 wirkt die $SO(3)$ gemäß der definierenden Darstellung im $\mathbb{R}^3$ (Drehung um orientierte Achse $\vec{n}$, $\|\vec{n}\| = 1$, und Winkel α):

$$\begin{aligned} D(\vec{n}, \alpha)\vec{x} &= \vec{x}_\| + \cos(\alpha)\,\vec{x}_\perp + \sin(\alpha)\,\vec{n} \times \vec{x}_\perp \\ &= \vec{x} + \big(1 - \cos(\alpha)\big)\,\vec{x}_\perp + \sin(\alpha)\,\vec{n} \times \vec{x} \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Aktion definiert eine lineare Darstelllung von $SO(3)$ auf $C^\infty(S^2, \mathbb{C})$ gemäß

$$T(\vec{n}, \alpha)\psi = \psi \circ D^{-1}(\vec{n}, \alpha) = \psi \circ D(\vec{n}, -\alpha)\,. \tag{4}$$

Die zugehörige Darstellung von $\mathrm{Lie}(SO(3))$ auf $C^\infty(S^2, \mathbb{C})$ erhält man, indem man einparametrige Schaaren $D\big(\vec{n}(s), \alpha(s)\big)$ mit $\vec{n}(0) = \vec{n}$, $\alpha(0) = 0$ und $\dot{\alpha}(0) = 1$ betrachtet. Ableiten von (4) nach s bei $s = 0$ ergibt dann für die Wirkung des durch $\vec{n}$ bezeichneten Elements aus $\mathrm{Lie}(SO(3))$: $\dot{D}_{\vec{n}}\vec{x} = \vec{n} \times \vec{x}$.

Zeigen Sie damit, dass

$$\dot{T}_{\vec{n}}(\psi) = -\vec{n} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}\psi) \tag{5}$$

und vergewissern Sie sich, dass

$$\left[\dot{T}_{\vec{n}}, \dot{T}_{\vec{m}}\right] = \dot{T}_{\vec{n}\times\vec{m}}\,. \tag{6}$$

Sei $\{\vec{e}_a \mid a = 1,2,3\}$ eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir definieren

$$J_a := i\,\dot{T}_{\vec{e}_a} \tag{7}$$

(so dass $[J_a, J_b] = i\varepsilon_{ab}{}^c J_c$) und bilden in üblicher Weise (s. Vorlesung) $J_\pm := J_1 \pm iJ_2$ und $J^2 := J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$

Statt $\vec{x}$ mit $\|\vec{x}\| = 1$ führen wir sphärische Polarkoordinaten ein:

$$x = \sin\theta\cos\varphi\,, \quad y = \sin\theta\sin\varphi\,, \quad z = \cos\theta\,. \tag{8}$$

Zeigen Sie damit, dass

$$J_\pm = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{9a}$$

$$J_3 = -i\,\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{9b}$$

$$J^2 = -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right). \tag{9c}$$

Bestimmen Sie nun zu jeder ganzen Zahl $\ell \in \mathbb{N}$ den irreduziblen Unterraum $V_\ell \subset C^\infty(S^2, \mathbb{C})$, indem die Sie erst die Differentialgleichung $J_+\psi_\ell = 0$ lösen und auf die Lösung sukzessive Potenzen von J_- anwenden und die so erhaltenen Funktionen in der L^2-Norm auf S^2 bezüglich des Maßes $d\mu = \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi$ normieren. Zeigen Sie, dass Sie so die $2\ell + 1$ Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$, zu festem ℓ und $-\ell \leq m \leq \ell$ erhalten. Diese spannen also gerade die irreduziblen Unterräume zum Gewicht (Drehipuls) ℓ auf. Es gilt $J^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell m}$, was mit (9c) explizit nachgerechnet werden kann aber sowieso aus der allgemeinen Konstruktion folgt (s. Vorlesung).

Aufgabe 3

Sei V ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum, $\otimes^n V^*$ das n-fache Tensorprodukt des Dualraums V^* (n-Multilinearformen) und $S \otimes^n V^* \subset \otimes^n V^*$ der Unterraum der vollständig symmetrischen n-Multilinearformen.

Zeigen Sie: Zu jedem $\Theta \in S \otimes^n V^*$ gibt es n Elemente $\phi^{(1)}, \cdots, \phi^{(n)} \in V^*$, so dass $\Theta = \phi^{(1)} \vee \cdots \vee \phi^{(n)}$. Hier bezeichnet $\vee$ das symmetrische Tensorprodukt. Zeigen Sie auch, dass die $\phi^{(k)}$ eindeutig bestimmt sind bis auf Permutation und Redefinition durch skalare Multiplikation, $\phi^{(k)} \mapsto \lambda^{(k)}\phi^{(k)}$, wobei die $\lambda^{(k)} \in \mathbb{C}$ der einzigen Einschränkung $\lambda^{(1)} \cdot \lambda^{(2)} \cdots \lambda^{(n)} = 1$ unterliegen. Machen Sie sich klar, dass damit natürlich auch gezeigt ist, dass wir jedes $T \in S \otimes^n V$ in das symmetrische Tensorprodukt von n Vektoren $f^{(1)}, \cdots, f^{(n)} \in V$ zerlegen können. Die $\phi^{(k)}$ und $f^{(k)}$ heißen dann die zu Θ bzw. T gehörigen *Hauptspinoren* (engl. *principal spinors*).

Tipp: Es genügt zu zeigen, dass $\phi^{(1)}, \cdots, \phi^{(n)} \in V^*$ existieren so dass $\big(\Theta - \phi^{(1)} \vee \cdots \vee \phi^{(1)}\big)(v, v, \cdots, v) = 0$ für alle $v \in V$ (warum?). Drücken wir das in Komponenten (bezüglich dualer Basen in V, V^* und Tensorprodukten von V^*) aus, so heißt das

$$\big(\Theta_{A_1 \cdots A_n} - \phi^{(1)}_{(A_1} \cdots \phi^{(n)}_{A_n)}\big) v^{A_1} \cdots v^{A_n} = 0 \tag{10}$$

für alle 2-Tupel $(v^0, v^1) \in \mathbb{C}^2$. O.B.d.A können wir annehmen $v^0 = 1$ (warum?). Setzen wir dann $v^1 =: z \in \mathbb{C}$, so ist $\Theta(v, \cdots, v) = \Theta_{00\cdots 0} + z\, n \Theta_{10\cdots 0} + \cdots + z^n \Theta_{1\cdots 1}$. Folgern Sie mit Hilfe eines Ihnen bekannten Satzes, dass n komplexe Zahlentupel $\big(\phi^{(1)}_0, \phi^{(1)}_1\big), \cdots, \big(\phi^{(n)}_0, \phi^{(n)}_1\big)$ existieren, so dass dies Polynom in z gleich ist $\big(\phi^{(1)}_0 + z\, \phi^{(1)}_1\big) \cdot \big(\phi^{(2)}_0 + z\, \phi^{(2)}_1\big) \cdots \big(\phi^{(n)}_0 + z\, \phi^{(n)}_1\big)$.

Aufgabe 4

Sei V ein komplexer Vektorraum und $\bar{V}$ sein komplex-konjugierter Raum ist. Zeigen Sie, dass $V \otimes \bar{V}$ und $V \oplus \bar{V}$ natürliche (d.h. ohne Benutzung weiterer Strukturelemente) reelle Strukuren tragen und charakterisieren Sie jeweils die reellen Vektoren. Gibt es auf V eine nicht-ausgeartete Bilinearform ε so hat z.B. $V \oplus \bar{V}^*$ auch eine (jetzt nicht mehr natürliche sondern ε benutzende) reelle Struktur. Charakterisieren Sie auch hier die rellen Vektoren.

Tipp: Die entsprechenden antilinearen Abbildungen, etwa $C : V \otimes \bar{V} \to V \otimes \bar{V}$ mit $C \circ C = \mathrm{id}_{V \otimes \bar{V}}$ kann man direkt angeben.

Aufgabe 5

Wir wenden uns nochmal der Polarzerlegung des Produktes zweier Boost-Transformationen zu, die wir bereits in Aufgabe 1 von Blatt 4 behandelt haben. Diesmal wollen wir aber die Zerlegung nicht in der Lorentzgruppe, sondern in $SL(2, \mathbb{C})$ – ihrer universellen Überlagerung – durchführen, was rechentechnisch interessante Unterschiede mit sich bringt.

In der Vorlesung wurden die Elemente in $SL(2, \mathbb{C})$, die Drehungen um die orientierte Achse $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ (wobei $\|\vec{n}\| = 1$) mit Winkel α oder Boosts mit Richtung $\vec{m}$ (wobei $\|\vec{m}\| = 1$) und Rapidität ρ entsprechen, angegeben mit beziehungsweise

$$A(\vec{n}, \alpha) = \cos(\alpha/2) E_2 - i\, \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\alpha/2)\,, \tag{11a}$$

$$B(\vec{m}, \rho) = \cosh(\rho/2) E_2 + \vec{m} \cdot \vec{\sigma} \sinh(\rho/2)\,. \tag{11b}$$

Gegeben seien also zwei Boosts $B(\vec{m}_1, \rho_1)$ und $B(\vec{m}_2, \rho_2)$. Ihr Produkt zerlegen wir polar:

$$B(\vec{m}_1, \rho_1) B(\vec{m}_2, \rho_2) = B(\vec{m}, \rho) A(\vec{n}, \alpha)\,. \tag{12}$$

Wir stecken uns das Ziel, die resultierenden Parameter $(\vec{m}, \rho)$ und $(\vec{n}, \alpha)$ als Funktionen der gegebenen Parameter $(\vec{m}_1, \rho_1)$ und $(\vec{m}_2, \rho_2)$ zu bestimmen. Der Winkel, den die beiden anfänglichen Boost-Richtungen einschließen heiße φ; d.h. $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = \cos\varphi$.

Gehen Sie nun so vor, dass Sie unter Benutzung der Multiplikationsregel

$$(\vec{n} \cdot \sigma)(\vec{m} \cdot \sigma) = (\vec{n} \cdot \vec{m}) E_2 + i (\vec{n} \times \vec{m}) \cdot \vec{\sigma} \tag{13}$$

beide Seiten von (12) auswerten und dann die reellen Koeffizienten von E_2, iE_2, $\vec{\sigma}$ und $i\vec{\sigma}$ vergleichen. Dabei nutzen Sie aus, dass diese acht (2×2) - Matrizen eine Basis des reellen Vektorraums aller komplexer (2×2) - Matrizen bilden. Werten Sie nun alle so entstehenden Gleichungen möglichst vollständig aus.

Aufgabe 6

Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$ (hier steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) der Dimension $n \geq 2$ mit symmetrischer, nicht-ausgearteter Bilinearform $\eta : V \times V \to \mathbb{K}$. (Beachte: Im Allgemeinen ist η indefinit.) Wir schreiben abkürzend $\eta(v, w) = v \cdot w$, $v^2 = v \cdot v$ und $v^\perp := \{x \in V \mid x \cdot v = 0\}$. Wie in der Vorlesung bezeichne

$$\mathsf{O}(V, \eta) := \{L \in \mathsf{GL}(V) : \eta(Lv, Lw) = \eta(v, w) \, \forall v, w \in V\} \tag{14}$$

die verallgemeinerte orthogonale Gruppe von (V, η).

Sei $v \in V$ mit $v^2 \neq 0$; unter einer *Spiegelung* an der Hyperebene $v^\perp$ versteht man die Abbildung (wie in der Vorlesung ist $v^\downarrow := \eta(v, \cdot)$)

$$\rho_v := \mathrm{id}_V - 2\, \frac{v \otimes v^\downarrow}{v^2}\,. \tag{15}$$

Zeigen Sie die folgenden drei Eigenschaften:

1. ρ_v ist orthogonal.
2. ρ_v ist involutiv, d.h. es gilt $\rho_v \circ \rho_v = \mathrm{id}_V$, so dass insbesondere $\rho_v^{-1} = \rho_v$.
3. Ist L orthogonal, dann gilt $L \circ \rho_v \circ L^{-1} = \rho_{Lv}$.

Beweisen Sie nun folgenden Satz: Jede orthogonale Transformation ist die Komposition von höchstens $2n - 1$ Spiegelungen.

Anleitung: Sei L orthogonal; wir wählen ein $v \in V$ das nicht „lichtartig“ ist, also das $v^2 \neq 0$ genügt (warum existiert so ein v immer?). Wir setzen $w := Lv$. Dann folgt aus $(w + v) \cdot (w + v) + (w - v) \cdot (w - v) = 4\, v^2 \neq 0$, dass $v - w$ und $w + v$ nicht beide zugleich lichtartig sein können. Sei also $(v \mp w)^2 \neq 0$ (entweder oberes oder unteres Vorzeichen), dann ist $\rho_{v \mp w}(v) = \pm w$ bzw. $\rho_{v \mp w}(w) = \pm v$. Also ist v Eigenvektor zum Eigenwert 1 der orthogonalen Transformation L', die definiert ist durch

$$L' = \begin{cases} \rho_{v-w} \circ L & \text{falls } (v - w)^2 \neq 0\,, \\ \rho_v \circ \rho_{v+w} \circ L & \text{falls } (v - w)^2 = 0\,. \end{cases} \tag{16}$$

Damit ist das orthogonale Komplement $v^\perp$ von $\mathrm{Span}\{v\} \subset V$ invariant unter L' und wir können die Einschränkung $L'\big|_{v^\perp}$ auf dem Unterraum $v^\perp$ mit dessen induzierter Bilinearform $\eta\big|_{v^\perp}$ betrachten, wobei letztere nicht ausgeartet ist (warum?). Schließen Sie nun induktiv weiter und benutzen dabei, dass sich jede orthogonale Transformation von $v^\perp$ kanonisch zu einer orthogonalen Transformation von $\mathrm{Span}\{v\} \oplus v^\perp$ fortsetzen lässt. Wieviel Spiegelungen brauchen Sie, wenn nur noch eine Dimension übrig ist?

Anmerkung: Dieser Satz kann erheblich verschärft werden: Tatsächlich kommt man mit höchstens n Spiegelungen aus (Satz von Cartan-Dieudonné). Der Beweis ist aber etwas aufwendiger.

Aufgabe 7

Diese Aufgabe schließt sich direkt an die vorherige an, deren Bezeichnungen wir hier einfach übernehmen.

Seinen K_1, K_2 und K drei Inertialsysteme, die durch drei normierte, zeitartige Vektoren n_1, n_2 und n mit gleicher Zeitorientierung („zukunftsgerichtet") charakterisiert sind. Es gilt also $\eta(n_1, n_1) = \eta(n_2, n_2) = \eta(n, n) = 1$ und alle weiteren Skalarprodukte zwischen diesen drei Vektoren sind entweder > 1 (wenn die Vektoren verschieden sind) oder $= 1$ (wenn die Vektoren gleich sind).

Allgemein gilt folgende Nomenklatur: Relativ zu einem Inertialsystem K, das durch einen normierten, zeitartigen Vektor n charakterisiert ist, ist ein „Boost" definiert als ein $L \in SO^{\uparrow}(V, \eta)$ (Komponente der Einheit von $O(V, \eta)$) mit folgender Eigenschaft: Es existiert ein zweidimensionaler Unterraum $E \subset V$ der n enthält, so dass $L\big|_{E^\perp} = \mathrm{id}_{E^\perp}$, also L das orthogonale Komplement $E^\perp$ von E in V punktweise fest lässt und somit nur in der Ebene E nicht-trivial transformiert. Beachte, dass E einen zeitartigen Vektor n enthält und somit selbst notwendig „zeitartig" ist, also $\eta\big|_E$ die Signatur $(1, -1)$ besitzt.

Relativ zu den Inertialsystemen K_1, K_2 und K gilt weiter folgende Nomenklatur: Ein „Boost-Link" von K_1 nach K_2 relativ zu K ist ein Boost relativ zu K, der n_1 nach n_2 abbildet; wir schreiben für ihn $L(n \,|\, n_2, n_1)$. Es gilt nun folgender Satz, der hier zu beweisen ist: Für gegebene n_1 n_2 und n gibt es genau einen solchen Boost-Link und dieser ist gegeben durch

$$L(n \,|\, n_2, n_1) = \rho_{(n_2 - \rho_n(n_1))} \circ \rho_n \,. \tag{17}$$

Anleitung: Wir beginnen mit folgender allgemeinen Beobachtung, die man leicht bestätigt: Sind n und n' verschiedene normierte zeitartige Vektoren, dann $(n' - n)^2 \neq 0$ und $\rho_{(n'-n)}(n) = n'$. Außerdem ist $\rho_{(n'-n)}$ die *eindeutige* Spiegelung, die n in n' abbildet. Eindeutigkeit heißt: Ist $\rho_v(n) = n' = \rho_w(n)$, dann sind v und w notwenig proportional und damit $\rho_v = \rho_w$.

Weiter beobachten wir Folgendes: Ist L ein Boost relativ zu n und $n' = Ln$, dann

$$L = \rho_{(n'+n)} \circ \rho_n \,. \tag{18}$$

Denn $\rho_n(n) = -n$ und $\rho_{(n'+n)}(-n) = n'$. Außerdem lässt $\rho_{(n'+n)} \circ \rho_n$ das orthogonale Komplement zu Span$\{n, n'\}$ punktweise fest, wie aus der allgemeinen Form (15) sofort ersichtlich ist. Letztlich ist $\rho_{(n'+n)} \circ \rho_n$ in der Komponente der Einheit, da beide Spiegelungen sowohl die Orientierung als auch die Zeitorientierung ändern (letzteres weil $(n' + n)$ wieder zeitartig ist wenn beide zeitartigen Vektoren gleiche Zeitorientierung besitzen, was der Fall ist, da L nach Voraussetzung in der Komponente der Einheit ist), ihre Kombination also beide erhalten.

Soweit folgt, dass jeder Boost L relativ zu n die Form $\rho_z \circ \rho_n$ hat, wobei $z = n + Ln$. Letztere Gleichung nützt uns aber nichts denn L ist uns ja nicht gegeben, sondern muss bestimmt werden durch die Forderung, dass $Ln_1 = n_2$, also dass $\rho_z\big(\rho_n(n_1)\big) = n_2$. Nach der zu Beginn gemachten Beobachtung ist aber die Spiegelung ρ_z (also der Strahl Span$\{z\}$) durch diese Bedingung eindeutig bestimmt zu $z \propto n_2 - \rho_n(n_1)$. Damit folgt schließlich (17).

Aufgabe 8

Diese Aufgabe schließt sich ihrerseits an die vorherige an.

Zeigen (argumentieren) Sie: Ist $n \in \mathrm{Span}\{n_1, n_2\}$ dann $L(n \mid n_2, n_1) = L(n_1 \mid n_2, n_1)$.

Wir wollen den Boost-Link (17) als Element in $\mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^*$ explizit auswerten. Dann wollen wir die in K gemessene Relativgeschwindigkeit zwischen K_2 und K_1 bestimmen, also die zum Boost $L(n \mid n_2, n_1)$ gehörige Geschwindigkeit $\vec{\Delta}(n \mid n_2.n_1) \in n^\perp$. Diese ist ein Element im Tangentialraum $T_n H$ zum Einheitshyperboloiden $H := \{v \in V : \eta(v,v) = 1, \eta(v,o) \geq 1\}$ aller zukunftsgerichteten (der feste zeitartige und normierte Vektor $o \in V$ gibt die Zeitorientierung vor) zeitartigen Einheitsvektoren am Punkt n. Diesen Tangentialraum $T_n H$ identifizieren wir mit dem orthogonalen Komplement $n^\perp := \{v \in V : \eta(v,n) = 0\}$.

Zeigen Sie durch explizites Ausführen der Komposition der beiden Reflektionen in (17), dass

$$L(n \mid n_2, n_1) \, = \, \mathrm{id} - \frac{1}{N} M \,. \tag{19a}$$

wobei

$$\begin{aligned} N :&= 1 - (n_1 \cdot n_2) + 2(n \cdot n_1)(n \cdot n_2) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[\|(n_1 + n_2)_\parallel\|^2 - \|(n_2 - n_1)_\perp\|^2\Big] \,, \end{aligned} \tag{19b}$$

wobei $\parallel$ und $\perp$ die orthogonalen Projektionen parallel zu und senkrecht auf n bezeichnen und $\|w\| := \sqrt{|w^2|}$ die Minkowski-Norm des Vektors w bezeichnet (beachte $\|w\| := \sqrt{-w^2}$ falls w raumartig), und

$$\begin{aligned} M = \Big\{ &(n_2 - n_1) \otimes (n_2 - n_1)^\downarrow + (n_2 - n_1)^2 \, n \otimes n^\downarrow \\ &+ 2\big[(n \cdot n_1)\, n \otimes (n_2 - n_1)^\downarrow - (n \cdot n_2)\,(n_2 - n_1) \otimes n^\downarrow\big]\Big\} \end{aligned} \tag{19c}$$

$$\begin{aligned} = \Big\{ &(n_2 - n_1)_\perp \otimes (n_2 - n_1)_\perp^\downarrow + (n_2 - n_1)_\perp^2 \; n \otimes n^\downarrow \\ &+ n \cdot (n_1 + n_2)\big[n \otimes (n_2 - n_1)_\perp^\downarrow - (n_2 - n_1)_\perp \otimes n^\downarrow\big]\Big\} \end{aligned} \tag{19d}$$

$$= -\|(n_2 - n_1)_\perp\|^2 \left\{ \big[n \otimes n^\downarrow - v \otimes v^\downarrow\big] - \frac{\|(n_1 + n_2)_\parallel\|}{\|(n_2 - n_1)_\perp\|}\big[n \otimes v^\downarrow - v \otimes n^\downarrow\big] \right\} , \tag{19e}$$

wobei $v := (n_2 - n_1)_\perp / \|(n_2 - n_1)_\perp\|$.

Aus (19c,19d) ist klar, dass der Boost-Link $L(n \mid n_2, n_1)$ ein Boost in der Ebene $\mathrm{Span}\{n, (n_2 - n_1)\} = \mathrm{Span}\{n, (n_2 - n_1)_\perp\} = \mathrm{Span}\{n, v\}$ ist.

Zeigen Sie mit Hilfe von (19e): Dieser hat die Form

$$\begin{aligned} L(n \mid n_2, n_1) &= \exp\Big[\rho\big(v \otimes n^\downarrow - n \otimes v^\downarrow\big)\Big] \\ &= \mathrm{id} + \big(\cosh(\rho) - 1\big) P_\parallel + \sinh(\rho)(v \otimes n^\downarrow - n \otimes v^\downarrow) \end{aligned} \tag{20}$$

wobei $\mathsf{P}_{\|}$ der Projektor auf Span$\{n, v\}$ ist und

$$\cosh(\rho) = \frac{\kappa^2+1}{\kappa^2-1}, \quad \sinh(\rho) = \frac{2\kappa}{\kappa^2-1}, \quad \kappa := \frac{\|(n_1+n_2)_{\|}\|}{\|(n_2-n_1)_{\perp}\|} \tag{21}$$

Leiten Sie auch folgende Form für $\gamma := \cosh(\rho)$ ab

$$\gamma = \frac{-1+(n_1\cdot n_2)+(n\cdot n_1)^2+(n\cdot n_2)^2}{1-(n_1\cdot n_2)+2(n\cdot n_1)(n\cdot n_2)} \tag{22}$$

und zeigen Sie, dass $\gamma = (n_1 \cdot n_2)$ falls $n \in$ Span$\{n_1, n_2\}$. Wie interpretieren Sie das? (Tipp: Das können Sie explizit nachrechnen, folgt aber auch ohne jede Rechnung. Das Argument steht am Beginn dieser Aufgabe.)

Zeigen Sie nun weiter: Die räumliche Geschwindigkeit des Boosts $L(n\,|\,n_2, n_1)$, die ein Element in $T_n H$ ist und die wir $\Delta(n\,|\,n_2, n_1)$ nennen, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Delta(n\,|\,n_2,n_1) &= \tanh(\rho)\,v \\ &= (n_2-n_1)_{\perp}\,\frac{n\cdot(n_1+n_2)}{(n\cdot n_1)^2+(n\cdot n_2)^2+(n_1\cdot n_2)-1}\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Man beachte, dass die Geschwindigkeit von K_i relativ zu K *nicht* durch $(n_i)_{\perp}$, sondern durch $\Delta(n\,|\,n_i) = (n_i)_{\perp}/\|(n_i)_{\|}\| = n_i/(n\cdot n_i) - n$ gegeben ist (warum?). Also ist $\Delta(n\,|\,n_2, n_1)$ *nicht* proportional zur Differenz $\Delta(n\,|\,n_2) - \Delta(n\,|\,n_1)$; vielmehr gilt also

$$\Delta(n\,|\,n_2,n_1) = \frac{\big[(n\cdot n_2)\Delta(n\,|\,n_2)-(n\cdot n_1)\Delta(n\,|\,n_1)\big]\big[n\cdot(n_1+n_2)\big]}{(n\cdot n_1)^2+(n\cdot n_2)^2+(n_1\cdot n_2)-1}\,. \tag{24}$$

Man beachte, dass $\Delta(n\,|\,n_i) \equiv \Delta(n\,|\,n, n_i)$.

Weitere Beobachtungen: Zeigen Sie, dass der orthogonale Projektor in die zeitartige Ebene Span$\{n_1, n_2\}$ gegeben ist durch

$$\mathsf{P}_{\|} = \frac{n_1\otimes n_1^{\downarrow}+n_2\otimes n_2^{\downarrow}-(n_1\cdot n_2)[n_1\otimes n_2^{\downarrow}+n_2\otimes n_1^{\downarrow}]}{1-(n_1\cdot n_2)^2} \tag{25}$$

Entsprechend ist $\mathsf{P}_{\perp} := \mathrm{id} - \mathsf{P}_{\|}$ der orthogonale Projektor auf das raumartige orthogonale Komplement von Span$\{n_1, n_2\}$.

Zeigen Sie, dass $[\mathsf{P}_{\perp}(n)]^2 = 1 - n\cdot\mathsf{P}_{\|}(n)$ und somit

$$[\mathsf{P}_{\perp}(n)]^2 = \frac{1-(n\cdot n_1)^2-(n\cdot n_2)^2+(n_1\cdot n_2)[-(n_1\cdot n_2)+2\,(n\cdot n_1)(n\cdot n_2)]}{1-(n_1\cdot n_2)^2}\,. \tag{26}$$

Benutzt man das um aus (22) die Kombination $-1+(n\cdot n_1)^2+(n\cdot n_2)^2$ zu eliminieren so erhalt man

$$\gamma = (n_1\cdot n_2) - [\mathsf{P}_{\perp}(n)]^2\frac{1-(n_1\cdot n_2)^2}{1-(n_1\cdot n_2)+2(n\cdot n_1)(n\cdot n_2)}\,. \tag{27}$$

Schließen Sie daraus (in Verschärfung eines vorher erhaltenen Resultats), dass $\gamma \leq (n_1 \cdot n_2)$ mit Gleichheitszeichen genau dann, wenn $n \in$ Span$\{n_1, n_2\}$. (Tipp: Sie müssen Gründe angeben, warum die Vorzeichen von $[P_\perp(n)]^2$, $(n_1 \cdot n_2)^2$ und $[1 - (n_1 \cdot n_2) + 2(n \cdot n_1)(n \cdot n_2)]$ festgelegt sind.)

Veranschaulichen Sie sich dieses Ergebnis anhand folgenden Spezialfalls: Es seien n_1 und n_2 fest vorgegeben, so dass insbesondere auch $\gamma_{12} := (n_1 \cdot n_2)$ festliegt. Ferner sei n so gewählt, dass $(n \cdot n_1) = (n \cdot n_2) =: \gamma_*$ (nicht fest). Dann wird aus (22):

$$\gamma = \frac{2\gamma_*^2 + (\gamma_{12} - 1)}{2\gamma_*^2 - (\gamma_{12} - 1)} . \tag{28}$$

Was bedeutet es, dass $\gamma \searrow 1$ für $\gamma_* \nearrow \infty$?

In (28) können wir γ_* ersetzen durch γ_{12} und den in $T_n H$ gemessenen Winkel α zwischen $\Delta(n\,|\,n_1)$ und $\Delta(n\,|\,n_2)$. Zeigen Sie

$$\gamma_* = \frac{\gamma_{12} - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} , \tag{29}$$

so dass

$$\gamma = \frac{\gamma_{12}(3 - \cos\alpha) - \cos\alpha - 1}{\gamma_{12}(1 + \cos\alpha) - 3\cos\alpha + 1} . \tag{30}$$

Zeigen Sie, dass die rechte Seite als Funktion on $\alpha \in [0, \pi]$ streng monoton steigend mit Wertebereich $[1, \gamma_{12}]$ ist. Warum ist nach (29) $\gamma_* \nearrow \infty$ für $\alpha \searrow 0$? Zeigen Sie, dass gemäß (28) $\gamma = \gamma_{12}$ genau dann gilt, wenn die Rapidität zu γ_* halb so groß ist wie die zu γ_{12}. Das hat eine einfache geometrische Erklärung; welche?

(Tipp: Um (29) abzuleiten können Sie eine orthonormierte Basis mit n als zeitartigen Basisvektor wählen. Dann ist $n = (1, \vec{0})$ und $n_i = \gamma_i(1, \vec{\beta}_i)$ mit $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_*$ und $\|\vec{\beta}_1\| = \|\vec{\beta}_2\| = \beta_*$ mit $\beta_*^2 = 1 - \gamma_*^{-2}$. Ferner ist $\vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2 = \beta_*^2 \cos\alpha$.)

Aufgabe 9

Wir betrachten die Lie-Algebra der Poincaré Gruppe, die nach Auszeichnung eines Punktes (Ursprung o) im affinen Minkowskiraum zu $V \rtimes O(V, \eta)$ isomorph wird, wobei V der zum affinen Minkowskiraum gehörige vierdimensionaler reelle Vektorraum ist und η eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform der Signatur $(1, -1, -1, -1)$ auf V (Minkowskimetrik). Nach Einführung einer Basis von V kann man eine Basis (P_a, M_{ab}) von $\mathrm{Lie}(V \rtimes O(V, \eta))$ definieren mit folgenden Lie-Produkten (Vgl. Aufgabe 1 von Blatt 5):

$$[P_a, P_b] = 0 , \tag{31a}$$
$$[M_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b , \tag{31b}$$
$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac} . \tag{31c}$$

Wir betrachten einen Basiswechsel der Form

$$P_a \mapsto \bar{P}_a := P_a , \tag{32a}$$
$$M_{ab} \mapsto \bar{M}_{ab} := M_{ab} - (X_a P_b - X_b P_a) , \tag{32b}$$

wobei X_a die (kovarianten) Komponenten eines festen Vektors in V seien, die hier einfach als vier Zahlen ($\in \mathbb{R}$) des Grundköpers der Lie-Algebra zu behandeln sind. Diesem Basiswechsel entspricht gerade die Änderung des ausgezeichneten Punktes o im affinen Raum: $o \mapsto \bar{o} := o + X$.

Zeigen Sie, dass die Lie-Produkte der neuen Basis $(\bar{P}_a, \bar{M}_{ab})$ identisch zu (31) sind, d.h., aus (31) hervorgehen, indem man (P_a, M_{ab}) durch $(\bar{P}_a, \bar{M}_{ab})$ ersetzt.

Aufgabe 10

Diese Aufgabe schließt sich an die vorherige an. Wir stellen uns vor, wir hätten eine treue Darstellung von $\mathtt{Lie}(V \rtimes O(V, \eta))$ auf der Lie-Algebra $C^\infty(P, \mathbb{R})$ der glatten, reellwertigen Funktionen auf einem Phasenraum eines physikalischen (mechanischen) Systems; also eine Einbettung $\mathtt{Lie}(V \rtimes O(V, \eta)) \hookrightarrow C^\infty(P, \mathbb{R})$. Dann werden die Komponenten (P_a, M_{ab}) reellwertige Funktionen auf dem Phasenraum P, die komponentenweise (31) genügen, falls man die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ durch die Poisson-Klammer $\{\cdot, \cdot\}$ ersetzt. Die Werte dieser Phasenraumfunktionen entsprechen den Erhaltungsgrößen zur Translations- und Lorentzgruppe, also Energie-Impuls bzw. Schwerpunktsbewegung-Drehimpuls. Im Unterschied zur ursprünglichen Lie-Algebra $\mathtt{Lie}(V \rtimes O(V, \eta))$ können wir in $C^\infty(P, \mathbb{R})$ nun auch das punktweise (assoziative) Produkt von Phasenraumfunktionen bilden, insbesondere also Polynome und gebrochen rationale Punktionen der (P_a, M_{ab}).

Ein Inertialsystem ist durch $n \in V$ mit $\eta(n, n) = 1$ charakterisiert. Wir betrachten nun die durch (32) definierten (von $X \in V$ abhängigen) Phasenraumfunktionen und fragen uns, für welche X die vier Funktionen $\bar{M}_{ab} n^b$ Nullstellen besitzen (also die entsprechenden Erhaltungsgrößen verschwinden):

$$\bar{M}_{ab} n^b = 0 \,. \tag{33}$$

Dies führt gemäß (32b) auf die Bedingung

$$\big((P_c n^c)\eta_{ab} - P_a n_b\big) X^b = M_{ab} n^b \,, \tag{34}$$

die zu lesen ist als vier vom jeweiligen Phasenraumpunkt abhängige Bedingung an die vier Komponenten X^a. Wir beschränken uns im Folgenden auf solche Punkte des Phasenraums, an denen $P_c n^c \neq 0$ ($P_c n^c$ ist die Energie des Systems im durch n charakterisierten Inertialsystem). Zeigen Sie, dass dann die allgemeine Lösung von (34) gegeben ist durch die einparametrige Schar (Scharparameter λ):

$$X_a(\lambda) = \frac{1}{P_c n^c} \big(P_a \lambda + M_{ab} n^b\big) \,. \tag{35}$$

Man nennt $\lambda \mapsto X(\lambda)$ die Weltlinie des „Zentrums“ oder auch „Schwerpunkts“. Diese ist genau dann zeitartig, wenn P zeitartig ist, d.h., $P_a P_b \eta^{ab} > 0$. Gemäß Konstruktion beschreibt diese die Menge aller Punkte im Minkowski-Raum (hier identifiziert mit V), bezogen auf die die Schwerpunkts-Erhaltungsgröße im durch n charakterisierten Inertialsystem verschwindet. Diese Weltlinie hängt nicht nur vom Zustand des Systems (also dem Phasenraumpunkt) ab, was ja klar ist, sondern auch von der Wahl des Inertialsystems (also der Wahl von n). Letzteres ist in der Galilei-Newton'schen Mechanik anders; dort ist die Weltlinie des Schwerpunktes so definiert, dass ihre Berechnung in allen Inertialsystemen zur geometrisch *gleichen* Weltlinie führt.

Tipp: Um (35) abzuleiten machen Sie sich klar, dass die Abbildung $\Pi : V \to V$ mit Komponenten $\Pi^a_b = \delta^a_b - \frac{P^a n_b}{P_c n^c}$ gerade die Projektion von V auf $n^\perp := \{v \in V : \eta(v, n) = 0\}$ parallel zu $P \in V$ ist (also *nicht* die *Orthogonal*projektion auf $n^\perp$, die ja parallel zu n wäre).

Das bezüglich dem so bestimmten $X(\lambda)$ definierte $\bar{M}_{ab}$ ist unabhängig von λ und wird allgemein als *Spintensor* bezeichnet (er ist eine Phasenraumfunktion mit Werten in $V^* \wedge V^*$), die ebenfalls von der Wahl des Inertialsystems (also von n) abhängt. Es gilt

$$S_{ab} = M_{ab} + \frac{(P_a M_{bc} - P_b M_{ac})n^c}{n^c P_c} \tag{36}$$

Berechnen Sie die Poisson-Relationen der durch (35) definierten Phasenraumfunktionen $X^a(\lambda)$ unter sich und mit den P_a bzw. M_{ab}. Inwieweit würden Sie sagen, dass die X^a raum-zeitlichen „Ortsobservablen“ der durch $\lambda \mapsto X(\lambda)$ definierten Weltlinie entsprechen?