Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur klassischen Physik, WS 2019/20

von DOMENICO GIULINI

Blatt 7

Aufgabe 1

Betrachten Sie den komplexen Vektorraum $V \cong \mathbb{C}^2$ der Spinoren mit der definierenden Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$. Wir betrachten einen festen Vektor $v \in V$, den wir o.B.d.A. als $v = (1,0)^\top$ wählen, und fragen nach der Untergruppe $H \subset SL(2,\mathbb{C})$ aller Gruppenelemente, die den durch v erzeugen Strahl (eindimensionalen Unterraum) invariant lässt:

$$H := \left\{ A \in SL(2,\mathbb{C}) : A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda(A) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda(A) \in \mathbb{C} \right\} \tag{1}$$

Beweisen Sie, dass diese Gruppe gegeben ist durch

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}^\times,\ b \in \mathbb{C} \} \right\}. \tag{2}$$

Hier bezeichnet $\mathbb{C}^\times$ die komplexen Zahlen ohne die 0.

Beweisen Sie, dass die Gruppe H isomorph ist zum semi-direkten Produkt $\mathbb{C} \rtimes_\alpha \mathbb{C}^\times$ (Gruppenmultiplikationen in $\mathbb{C}^\times$ und $\mathbb{C}$ sind die Multiplikation bzw. Addition komplexer Zahlen), wobei $\alpha : \mathbb{C}^\times \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\alpha(z)(w) := z^2 w$.

Tipp: Betrachten Sie die Abbildung

$$H \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \big(ab\,,\, a\big). \tag{3}$$

Weisen Sie nach, dass diese ein Gruppenisomorphismus bezüglich der gegebenen Gruppenstruktur in H und der angegebenen, durch α definierten semi-direkten Produktstruktur auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ ist.

Durch welche Untergruppe von H wird der lichtartige Vektor mit den komponenten $\ell^\mu = \sigma^\mu_{A\bar{A}} v^A \bar{v}^{\bar{A}}$ fest gelassen?

Benutzen Sie diese Ergebnisse, um die Untergruppen der eigentlich orthochornen Lorentzgruppe $\mathrm{Lor}_+^\uparrow$ zu charakterisieren, die einen Lichtstrahl einmal als Menge und einmal punktweise invariant lassen.

Aufgabe 2

Seien V der 2-dimensionale komplexe Vektorraum der Spinoren und $\varphi_{A_1\cdots A_n}$ die Komponenten eines Elements in $\bigvee_n V^*$ (vollständig symmetrisiertes Tensor-Produkt). Angenommen es gibt ein $\nu \in V$ so dass $\nu^{A_1}\varphi_{A_1\cdots A_n} = 0$. Zeigen Sie: Dann ist $\varphi_{A_1\cdots A_n}$ notwenig ein Vielfaches von $\nu_{(A_1}\cdots\nu_{A_n)}$.

Tipp: Wie in der Vorlesung besprochen und in Aufgabe 3 von Blatt 6 gezeigt, kann φ in das symmetrische Tensorprodukt von „Hauptspinoren" zerlegt werden. Die zu beweisende Aussage ist also äquivalent der, dass $\nu^{A_1}\varphi_{A_1\cdots A_n} = 0$ nur dann gelten kann, wenn alle Hauptspinoren von φ proportional zu ν sind. Zeigen Sie: Angenommen genau k der n Hauptspinoren seien nicht zu ν proportional, dann folgt $\nu^{A_1}\cdots\nu^{A_k}\varphi_{A_1\cdots A_n} \neq 0$. Letzteres kann nach unseren Voraussetzungen aber für kein k gelten.

Aufgabe 3

In SI-Einheiten hat der Faraday-Tensor des elektromagnetischen Feldes bezüglich einer orthonormierten Basis die Komponenten

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Es gilt $F = dA$ wobei $A = A_\mu dx^\mu$ und $A^\mu = (\Phi/c\,,\,\vec{A})$. Die Komponenten der Minkowski-Metrik sind $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

Zeigen Sie, dass der dazu duale Tensor folgende Komponenten hat:

$$\star F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3/c & E_2/c \\ B_2 & E_3/c & 0 & -E_1/c \\ B_3 & -E_2/c & E_1/c & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Also gilt

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \left(\tfrac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,,\,-\tfrac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} + \vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \tag{6a}$$

$$\partial_\mu \star F^{\mu\nu} = \left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,,\,\tfrac{1}{c}\dot{\vec{B}} + \tfrac{1}{c}\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) \tag{6b}$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen (in SI-Einheiten) sind $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, die Inhomogenen $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ und $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$. Zeigen Sie im Fall wo $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ und $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ mit konstanten μ_0 und ε_0, wobei $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, diese äquivalent sind zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu\,, \tag{7a}$$

$$\partial_\mu \star F^{\mu\nu} = 0\,. \tag{7b}$$

Dabei sind $J^\mu = (c\rho\,,\,\vec{j})$ die Komponenten der elektrischen Vierer-Stromdichte.

Aufgabe 4

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Faraday-Tensor einen symmetrisches Spinorfeld 2-Stufe Φ_{AB} entspricht, so dass (die $\sigma^{\mu}_{A\bar{A}} = 2^{-1/2}(E_2, \vec{\sigma})$ sind die van-der-Waerden-Symbole):

$$F_{\mu\nu} \mapsto F_{\mu\nu}\sigma^{\mu}_{A\bar{A}}\sigma^{\nu}_{B\bar{B}} =: F_{AB\bar{A}\bar{B}} = \Phi_{AB}\bar{\epsilon}_{\bar{A}\bar{B}} + \bar{\Phi}_{\bar{A}\bar{B}}\epsilon_{AB}\,. \tag{8a}$$

Es gilt

$$\Phi_{AB} = F_{AB\,\bar{C}}{}^{\bar{C}}\,. \tag{8b}$$

Drücken Sie die 3 komplexen Komponenten Φ_{11}, Φ_{22} und $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ durch die 6 reellen Komponenten $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus. Tipp: Sie können dazu auch von der in der Vorlesung gezeigten Formel ausgehen:

$$\Phi_{AB}\bar{\epsilon}_{\bar{A}\bar{B}} = \tfrac{1}{2}\big(F_{\mu\nu} + i\star F_{\mu\nu}\big)\sigma^{\mu}_{A\bar{A}}\sigma^{\nu}_{B\bar{B}} \tag{9}$$

Setzen Sie in dieser $\bar{A} = 1$ und $\bar{B} = 2$; aus der Kenntnis der Komponenten von $F + i\bar{F}$ nach gemäß (4)und (5) können Sie dann für die Kombinationen $(1,1)$, $(2,2)$ und $(1,2)$ von (A,B) die Komponenten von Φ_{AB} berechnen.

Weisen Sie nun nach, dass die Gleichungen

$$\partial^{A\bar{A}}\Phi_{AB} = 0 \tag{10}$$

äquivalent sind den quellenfreien ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) Maxwell-Gleichungen.

Aufgabe 5

Der Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes ist durch den Faraday-Tensor (vgl. (4)) gegeben durch (SI-Einheiten)

$$T^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2\mu_0}\big(-F^{\alpha\nu}F_{\beta\nu} + \tfrac{1}{4}\,\delta^{\alpha}_{\beta}\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\big)\,. \tag{11}$$

Schreiben Sie diesen gemäß (8a) in Spinor-Form $T^{\alpha}_{\beta} \to T^{A\bar{A}}_{B\bar{B}}$ um und zeigen Sie, dass er dann die folgende einfache Form annimmt:

$$T^{A\bar{A}}_{B\bar{B}} = \frac{1}{\mu_0}\,\Phi^{A}_{B}\bar{\Phi}^{\bar{A}}_{\bar{B}}\,. \tag{12}$$

Zeigen Sie damit, dass die sogenannte „Rainich-Identität“ gilt, die aussagt, dass das Quadrat des durch den Energie-Impulstensor vermittelte Endomorphismus proportional zur Identität ist:

$$T^{A\bar{A}}_{B\bar{B}}T^{B\bar{B}}_{C\bar{C}} = \frac{1}{4\mu_0^2}\,(\Phi_{AB}\Phi^{AB})(\bar{\Phi}_{\bar{A}\bar{B}}\bar{\Phi}^{\bar{A}\bar{B}})\,\delta^{A}_{C}\delta^{\bar{A}}_{\bar{C}} \tag{13}$$

Tipp: Für (12) und (13) brauchen Sie die Identität $\Phi^{AC}\Phi_{BC} = \delta^{A}_{B}\,\Phi_{CD}\Phi^{CD}$. Die folgt aus $\Phi^{AC}\Phi_{BC} = \epsilon^{AD}\Phi^{C}_{D}\Phi_{BC} = \epsilon^{AD}(\Phi^{C}_{(D}\Phi_{B)C} + \Phi^{C}_{[D}\Phi_{B]C}) = \epsilon^{AD}\epsilon_{DB}\frac{1}{2}\Phi^{C}_{E}\Phi^{E}_{C} = -\frac{1}{2}\delta^{A}_{B}(-\Phi_{CE}\Phi^{CE})$. Man beachte, dass der in DB symmetrische Term verschwindet (warum?).