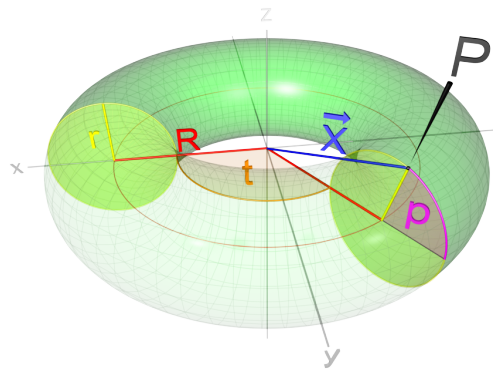


Übungen zur Vorlesung  
**Gravitationsphysik - Theoretischer Teil**  
 von DOMENICO GIULINI

**Blatt 3**

**Aufgabe 1**



Das Bild zeigt eine Torusfläche, dessen Mittelkreis wir uns als Kreis vom Radius  $R$  in der  $xy$ -Ebene um den Ursprung denken. Die Torusfläche besteht dann in einem Schlauch vom Radius  $r < R$  um den Mittelkreis. Sie wird durch zwei Winkelkoordinaten  $x^1 = t$  (Längengrad) und  $x^2 = p$  (Breitengrad) parametrisiert, so dass (wir schreiben, der Vorlesung folgend,  $\vec{z}$  statt  $\vec{x}$ ):

$$\vec{z}(t, p) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + r \cos p \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + r \sin p \vec{e}_z = \begin{pmatrix} (R + r \cos p) \cos t \\ (R + r \cos p) \sin t \\ r \sin p \end{pmatrix} \quad (1)$$

Berechnen Sie die Matrix der ersten Fundamentalform (Metrik) gemäß:

$$g_{ab} = \vec{z}_a \cdot \vec{z}_b. \quad (2)$$

Wie groß ist der Flächeninhalt der Torusfläche?

Zeigen Sie, dass die Flächennormale gegeben ist durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos p \cos t \\ \cos p \sin t \\ \sin p \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Berechnen Sie daraus die Matrix  $L_a^b$  der Weingarten-Abbildung, indem Sie folgende Gleichung aus der Vorlesung benutzen (wie immer ist  $\vec{n}_a := \partial \vec{n} / \partial x^a$ ):

$$\vec{n}_a := L_a^b \vec{z}_b. \quad (4)$$

Da diese bereits in Diagonalform ist, können Sie die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung einfach ablesen. Zeigen Sie damit, dass die Gauß'sche Krümmung der Torusfläche gegeben ist durch

$$K(t, p) = \frac{\cos p}{R + r \cos p} \cdot \frac{1}{r}. \quad (5)$$

Was ergibt die Integration der Gauß'schen Krümmung über die gesamte Torusfläche?

## Aufgabe 2

Allgemein hängen die Tangentialvektorfelder  $\vec{z}_a := \partial \vec{z} / \partial x^a$  an die durch die Einbettung  $\vec{z}(x^1, x^2)$  charakterisierte Fläche von der Wahl der Parameter  $(x^1, x^2)$  ab. Zeigen Sie: Sind

$$\bar{J}_a^{\bar{a}} := \frac{\partial \bar{x}^{\bar{a}}}{\partial x^a} \quad \text{und} \quad J_a^{\bar{a}} := \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^{\bar{a}}} \quad (6)$$

die Jacobi-Matrizen der Transformation

$$(x^1, x^2) \mapsto (\bar{x}^1(x^1, x^2), \bar{x}^2(x^1, x^2)) \quad (7)$$

bzw. ihrer Inversen, so ist

$$\bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = g_{ab}(x) J_a^{\bar{a}}(\bar{x}) J_b^{\bar{b}}(\bar{x}) \quad (8a)$$

$$\bar{g}^{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = g^{ab}(x) \bar{J}_a^{\bar{a}}(x) \bar{J}_b^{\bar{b}}(x). \quad (8b)$$

## Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass unter dem in Aufgabe 2 diskutierten Parameterwechsel die 2. Ableitungen der Funktion  $\vec{z}$  wie folgt transformieren

$$\vec{z}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = \vec{z}_{ab}(x) J_a^{\bar{a}}(\bar{x}) J_b^{\bar{b}}(\bar{x}) + \vec{z}_c(x) J_{\bar{a}\bar{b}}^c(\bar{x}), \quad (9)$$

wobei

$$J_{\bar{a}\bar{b}}^c = \frac{\partial J_a^c}{\partial \bar{x}^{\bar{b}}} = \frac{\partial^2 x^c}{\partial \bar{x}^{\bar{a}} \partial \bar{x}^{\bar{b}}}. \quad (10)$$

Benutzen sie nun die  $K_{ab}$  und  $\Gamma_{ab}^c$  definierende Gleichung aus der Vorlesung,

$$\vec{z}_{ab} = K_{ab} \vec{n} + \Gamma_{ab}^c \vec{z}_c, \quad (11)$$

um folgende Transformationsformeln für die Koeffizientenfunktionen abzuleiten (wir unterdrücken die Argumente  $x$  bzw  $\bar{x}$ , die sinngemäß wie in (8) anzuschreiben wären):

$$\bar{K}_{\bar{a}\bar{b}} = K_{ab} J_a^{\bar{a}} J_b^{\bar{b}}, \quad (12)$$

und

$$\bar{\Gamma}_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}} = \bar{J}_c^{\bar{c}} \Gamma_{ab}^c J_a^{\bar{a}} J_b^{\bar{b}} + \bar{J}_c^{\bar{c}} J_{\bar{a}\bar{b}}^c \quad (13a)$$

$$= \bar{J}_c^{\bar{c}} \left( \Gamma_{ab}^c - J_n^c \bar{J}_{ab}^n \right) J_a^{\bar{a}} J_b^{\bar{b}}. \quad (13b)$$

Dabei besteht der Schritt von (13a) nach (13b) lediglich in einem Umschreiben des Inhomogenitätsterms.

Sei  $p$  ein Punkt der Fläche an dem die Koordinaten  $(x^1, x^2)$  die Werte  $(x_p^1, x_p^2)$  annehmen. Führen Sie in der Nachbarschaft von  $p$  neue Koordinaten durch

$$\bar{x}^c = (x^c - x_p^c) + \frac{1}{2} \Gamma_{ab}^c(p) (x^a - x_p^a) (x^b - x_p^b) \quad (14)$$

ein und zeigen Sie mit Hilfe von (13b), dass  $\bar{\Gamma}_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}(p) = 0$ .

#### Aufgabe 4

Ein Feld  $\vec{v}(x^1, x^2)$  von Tangentialvektoren an die Fläche hat die Entwicklung

$$\vec{v}(x^1, x^2) = v^a(x^1, x^2) \bar{z}_a(x^1, x^2). \quad (15)$$

Zeigen Sie, dass unter einem Parameterwechsel (7) die Komponenten des Vektorfeldes wie folgt transformieren:

$$v^a(x) \rightarrow \bar{v}^{\bar{a}}(\bar{x}) = J_{\bar{a}}^a(x) v^a(x). \quad (16)$$

Man betrachte nun die Komponenten der kovarianten Ableitung

$$\nabla_a v^c := \frac{\partial v^c}{\partial x^a} + \Gamma_{ab}^c v^b. \quad (17)$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (16) und (13b), dass deren Transformationsgesetz gegeben ist durch (die Argumente  $x$  und  $\bar{x}$  sind wieder sinngemäß zu ergänzen):

$$\nabla_{\bar{a}} \bar{v}^{\bar{c}} = \bar{J}_{\bar{a}}^a J_c^{\bar{c}} \nabla_a v^c. \quad (18)$$

Welche Rolle spielt hierbei der inhomogene Term in (13)?

#### Aufgabe 5

Eine  $p + q$ -fach indizierte Größe  $T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$  bildet die Komponenten eines Tensors der Stufe  $\binom{p}{q}$  (man sagt:  $p$ -fach kontravariant und  $q$ -fach kovariant), wenn sie unter Koordinatenwechsel linear und homogen wie folgt transformieren

$$\bar{T}_{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_q}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_p}(\bar{x}) = J_{\bar{a}_1}^{a_1}(x) \dots J_{\bar{a}_p}^{a_p}(x) T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}(x) \bar{J}_{\bar{b}_1}^{b_1}(\bar{x}) \dots \bar{J}_{\bar{b}_q}^{b_q}(\bar{x}). \quad (19)$$

Die kovariante Ableitung eines Tensors der Stufe  $\binom{p}{q}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} \nabla_c T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} &:= \frac{\partial T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}}{\partial x^c} \\ &+ \Gamma_{cd}^{a_1} T_{b_1 \dots b_q}^{d a_2 \dots a_p} + \dots + \Gamma_{cd}^{a_p} T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_{p-1} d} \quad (p \text{ Summanden}) \\ &- \Gamma_{cb_1}^d T_{db_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} - \dots - \Gamma_{cb_q}^d T_{b_1 \dots b_{q-1} d}^{a_1 \dots a_p} \quad (q \text{ Summanden}) \end{aligned} \quad (20)$$

Zeigen Sie dann allgemein mit Hilfe von (19) und (13), dass die kovariante Ableitung eines Tensors der Stufe  $\binom{p}{q}$  ein Tensor der Stufe  $\binom{p}{q+1}$  ist. (Tipp: Verwenden Sie (13b) für die oberen und (13a) für die unteren Indizes.)