Übungen zur Vorlesung

**Gravitationsphysik - Theoretischer Teil**

von DOMENICO GIULINI

## Blatt 6

### Aufgabe 1

Seien $x^\mu(s)$ die Koordinatenfunktionen einer lichtartigen Geodätischen bezüglich der statischen Metrik ($x^0 = ct$)

$$ds^2 = f^2\,(dx^0)^2 - h_{ab}\,dx^a dx^b\,, \tag{1}$$

d.h. sie genügen (ein Punkt bezeichnet die Ableitung nach $s$)

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta = 0 \tag{2}$$

und

$$g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta = 0\,. \tag{3}$$

Die Koeffizientenfunktionen $f$ und $h_{ab}$ hängen von der Zeitkoordinate $t$ nicht abhängen. Ferner sei die Funktion $f$ im betrachteten Gebiet überall positiv und die symmetrische Matrix $h_{ab}$ überall positiv definit.

Rechnen Sie nach, dass

$$\Gamma^m_{ab} = \tfrac{1}{2}h^{mn}\big(-\partial_n h_{ab} + \partial_b h_{na} + \partial_a h_{bn}\big)\,, \tag{4a}$$

$$\Gamma^0_{ab} = \Gamma^a_{0b} = \Gamma^0_{00} = 0\,, \tag{4b}$$

$$\Gamma^0_{0a} = \frac{\partial_a f}{f}\,, \tag{4c}$$

$$\Gamma^a_{00} = h^{ab} f \partial_a f\,, \tag{4d}$$

wobei $h^{ab}$ die zu $h_{ab}$ inverse Matrix ist.

Zeigen Sie, dass die $\mu = 0$ Komponente der Geodätengleichung (2) äquivalent ist zu

$$f^2\big(\vec{x}(s)\big)\dot{x}^0(s) = k = \text{konst} \tag{5}$$

wobei wir o.B.d.A. die Konstante $k > 0$ annehmen dürfen. Diese Gleichung erlaubt die Ableitungen nach $s$ durch Ableitungen nach $t = x^0/c$ zu ersetzen, die wir durch einen Strich bezeichnen.

Zeigen Sie nun, dass die $x^a$ als Funktionen von $t$ die Geodätengleichung

$$x''^m + \tilde{\Gamma}^m_{ab}\,x'^a\,x'^b = 0 \tag{6}$$

erfüllen, wobei die $\tilde{\Gamma}^m_{ab}$ in der üblichen Weise mit Hilfe der in der Vorlesung eingeführten *optischen Metrik* sind:

$$\tilde{h}_{ab} := \frac{h_{ab}}{f^2}\,. \tag{7}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass daraus die Verallgemeinerung des Fermat'schen Prinzips der kürzesten Lichtlaufzeit für statische Gravitationsfelder folgt. Was besagt dieses Prinzip genau?

## Aufgabe 2

Gehen Sie von der (relativ leicht zu beweisenden) Tatsache aus, dass jede sphärisch symmetrische Metrik des dreidimensionalen Raumes (das folgende Argument funktioniert analog in jeder Dimension) auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$ds^2 = f^2(r)\,dr^2 + g^2(r)\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\big)\,. \tag{8}$$

Denken Sie sich $r$ als Funktion einer anderen Radiuskoordinate $r_*$. Zeigen Sie: Erfüllt diese Funktion die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{dr_*} = \frac{g\big(r(r_*)\big)}{f\big(r(r_*)\big)\,r_*} \tag{9}$$

so ist die obige Metrik ausgedrückt in den Koordinaten $(r_*, \theta, \varphi)$ von der konform flachen Form

$$ds^2 = h^2(r_*)\big(dr_*^2 + r_*^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\big) \tag{10}$$

mit $h(r_*) = g\big(r(r_*)\big)/r_*$.

## Aufgabe 3

Der räumliche Teil der aus der Vorlesung bekannten Schwarzschildmetrik ist in den üblichen (Schwarzschild'schen) Koordinaten gegeben durch

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\,, \tag{11}$$

wobei $r_S = Gm/c^2$ der Schwarzschhildradius ist. Zeigen Sie, dass die Funktion $r(r_*)$ der vorherigen Aufgabe in diesem Fall gegeben ist durch

$$r = r_*\left(1 + \frac{r_s}{4r_*}\right)^2 \tag{12}$$

und dass die Schwarzschildmetrik in den Koordinaten $(t, r_*, \theta, \varphi)$ dann die folgende Form annimmt:

$$ds^2 = \left[\frac{1 - \frac{r_S}{4r_*}}{1 + \frac{r_S}{4r_*}}\right]^2 c^2\,dt^2 - \left[1 + \frac{r_s}{4r_*}\right]^2\big(dr_*^2 + r_*^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\big)\,. \tag{13}$$

Berechnen Sie daraus nach der in der Vorlesung angegebenen Vorschrift die optische Metrik und den effektiven Brechungsindex für den räumlichen Verlauf von Lichtstrahlen. Zeigen Sie weiter, dass die Metrik (13) invariant ist unter der Transformation

$$r_* \mapsto r'_* := \frac{(r_S/4)^2}{r_*} \tag{14}$$

bei ungeänderten $t$, $\theta$ und $\varphi$. Was bedeutet dies für die Geometrie des Raumes $t =$ konst. und welche besondere Rolle spielt die 2-Sphäre vom Radius $r_* = r_S/4$?