Übungen zur Vorlesung

Gravitationsphysik - Theoretischer Teil

von DOMENICO GIULINI

Blatt 9

Aufgabe 1

Wie in der Vorlesung erklärt ist in linearer Näherung die Metrik einer in z-Richtung propagierenden ebenen Gravitationswelle in TT-Eichung gegeben durch

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2\, dt^2 &- \bigl(1 - h_+(t - z/c)\bigr)\, dx^2 \\ &- \bigl(1 + h_+(t - z/c)\bigr)\, dy^2 \\ &+ 2h_\times(t - z/c)\, dx dy \\ &- dz^2 \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Stellen Sie die Gleichungen für eine lichtartige Geodätische in dieser Metrik auf und zeigen Sie damit, dass ein anfänglich in x-Richtung orientierter Lichtstrahl keine Ablenkung in y-Richtung erfährt, und dass seine Ablenkung in z-Richtung proportional zur Amplitude h_+ ist. Damit können Sie unter konsequenter Weglassung quadratischer Terme in der Amplitude die Bedingung der Lichtartigkeit in der Form schreiben

$$c dt = \pm dx\bigl(1 - \tfrac{1}{2}h_+(t(x))\bigr) \,, \tag{2}$$

wobei das obere/untere Vorzeichen für Lichtstrahlen gilt, die in positiver/negativer x-Richtung fortschreiten.

Aufgabe 2

Wenden Sie das Ergebnis (2) der vorherigen Aufgabe nun auf folgende Situation an: Auf der x-Achse ($y = z = 0$) befinden sich bei $x = 0$ eine monochromatische Lichtquelle und bei $x = L$ ein Spiegel. Sowohl Lichtquelle als auch Spiegel seinen kräftefrei, im Feld der Gravitationswelle also bei konstanten x-Werten (das ist eine spezielle Eigenschaft der TT-Eichung; vgl. Vorlesung). Man betrachte ein zum Zeitpunkt $t = t_a$ entlang der x-Richtung von der Quelle ausgesandtes Lichtsignal der Frequenz ν_a. Dieses wird zu einem Zeitpunkt t_r am Spiegel reflektiert und trifft zum Zeitpunkt $t = t_e$ mit der Frequenz $\nu_e$wieder bei der Quelle ein. Zeigen Sie, dass

$$\nu_e = \nu_a \left[1 + \frac{1}{2}\Bigl(h_+\bigl(t_a + \tfrac{2L}{c}\bigr) - h_+\bigl(t_a\bigr)\Bigr)\right] \,. \tag{3}$$

Anleitung: Integrieren Sie (2) einmal von $x = 0$ bis $x = L$ entlang der ungestörten Bahn $t(x) = t_a + (x/c)$ und einmal von $x = L$ nach $x = 0$ zurück entlang der ungestörten Bahn $t(x) = (2L - x)/c$. Durch Addition erhalten Sie t_e als Funktion von t_a. Berechnen Sie dt_e/dt_a und argumentieren Sie, dass dies gleich dem Verhältnis ν_a/ν_e ist. [Sie dürfen entlang der ungestörten Bahn integrieren, da die Störung in z-Richtung bei Berücksichtigung zu quadratischen Termen in h_+ führen würde, die wir aber konsequent vernachlässigen.]

Aufgabe 3

Nehmen Sie als stark vereinfachtes Modell eines Neutronensterns eine Kugel vom Radius $R = 12\,\text{km}$ und einer Masse M von 1,5 Sonnenmassen an, die homogen mit mit Neutronen gefüllt ist, von denen jedes eine nukleare Bindungsenergie von $16\,\text{MeV}$ besitzt. Schätzen Sie damit das Verhältnis der gesamten gravitativen Bindungsenergie (berechnet nach der Newton'schen Gravitationstheorie) zur gesamten nuklearen Bindungsenergie ab sowie das Verhältnis beider zu Mc^2. Zeigen Sie dazu zunächst allgemein, dass es bei vorgegebener Massendichte ρ und vorgegebenem Radius R eine kritische Masse M_{krit} gibt, oberhalb der die (mit M^2 anwachsende) gravitative Bindungsenergie die (nur linear in M wachsende) nukleare Bindungsenergie überwiegt. Diese ist von der Größenordnung

$$M_{\text{krit}} := \rho^{-1/2} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{G m_N}\right)^{3/2}, \tag{4}$$

wobei ε die Bindungsenergie pro Nukleon ist und m_N die Masse des Neutrons.

Aufgabe 4

Die Abstrahlungsleistung eines Binärsystems der Massen m_1 und m_2 die im gegenseitigen Abstand r den gemeinsamen Schwerpunkt umkreisen ist (siehe Vorlesung)

$$P_G = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{r^5}. \tag{5}$$

Nach dem Virialsatz ist die Gesamtenergie selbstgravitierender Systeme gleich dem halben Zeitmittel ihrer potentiellen Energie. Letztere ist in führender Ordnung gleich dem Newton'schen Ausdruck, so dass

$$E = \tfrac{1}{2} \langle V_{\text{pot}} \rangle = -G \frac{m_1 m_2}{2r}, \tag{6}$$

wobei hier r als der über einige Umläufe gemittelte Radius zu verstehen ist. Durch die Abstrahlung von Energie in Form von Gravitationswellen wird r (langsam) kleiner werden. In dem Sie also $-dE/dt = P_G$ setzen, leiten Sie ab, dass die Zeitspanne $(t_e - t_a)$, die das System benötigt um vom Anfangsradius r_a zum Endradius r_e zu spiralen der Gleichung genügt

$$r_a^4 - r_e^4 = \frac{256}{5} \cdot \left(\frac{G m_1}{c^2}\right) \cdot \left(\frac{G m_2}{c^2}\right) \cdot \left(\frac{G(m_1 + m_2)}{c^2}\right) \cdot c(t_e - t_a). \tag{7}$$

Schätzen Sie damit durch Setzen von $r_e = 0$ die Zeit eines vollständigen Systemzerfalls für $m_1 = m_2 = m_\odot$ (Sonnenmasse) und die beiden Fälle $r = R_\odot$ (Sonnenradius) bzw. $r = 30\,\text{km}$ ab. Berechnen Sie auch die Abstrahlungsleistung in beiden Fällen.